

Құрметті студент!

Дүние жүзіндегі дамыған елдердің ғылыми деңгейі жоғары ғылыми көрсеткіштерімен анықталатыны белгілі. Қазақстан Республикасы бәсекеге қабілетті 50 елдің қатарына қосылу мақсатын қойып отырған жағдайда сапалы білім беру және сапалы білім алу қажеттілігі күмән туғызбайды. Ғылыми-ізденіс зерттеулерде жиі қолданылатын математиканың негізгі салаларының бірі Математикалық талдау.

Математикалық талдау пәні математикалық факультеттерге толық курс ретінде терең оқытылады. Сіздің назарыңызға инженерлік мамандықтар үшін мемлекеттік стандарттарға сәйкес осы пән бойынша қысқаша жазылған электрондық оқулық ұсынылып отыр. Оқулықта теориялық мәліметтермен қатар әрбір тақырып бойынша шығарылатын есептердің шығару әдістері мейлінше талдап көрсетілген. Біздің кеңесіміз: Осы пәнді толық меңгеру үшін тек ұсынылып отырған электрондық оқулықпен шектеліп қалуға болмайды. Силабуста көрсетілген басқа да әдебиеттерді пайдалану керек.

Сіз Математикалық талдау пәні бойынша лекция тыңдадыңыз және практикалық сабақтарға қатысып біраз білім жинақтадыңыз. Енді осы жинақтаған біліміңізді тестілік сұрақтарға жауап беру арқылы тексеру мүмкіндігіңіз бар. Тестілік сұрақтарға бірден жауап беруге көшпей тұрып әуелі төменде келтірілген қысқаша теориялық мәліметтермен танысып, еске түсіріп, сондай-ақ, типтік есептердің шығару үлгілерімен танысып біраз жаттығып алуға кеңес береміз.

Пән үш тараудан тұрады:

1. Бір айнымалылы функциялар
2. Көп айнымалылы функциялар
3. Қатарлар. Дифференциалдық теңдеулер

I ТАРАУ. БІР АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯЛАР

1.1. ТАЛДАУҒА КІРІСПЕ

1.1.1. Функцияның анықталу облысы және мәндерінің жиыны

Мысалдар қарастырамыз.

1. Функцияның анықталу облысын табыңыз:

$$y = \frac{\sqrt{2x^2 + x - 1}}{x^2 - 3x}$$

Шешуі: Бұл функцияның анықталу облысы екі шартты қанағаттардыруы керек:

- 1) Квадрат түбір теріс емес сандар үшін анықталады;
- 2) Нөлге бөлуге болмайды.

$$\text{Сондықтан} \quad \begin{cases} 2x^2 + x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1, x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{Жауабы: } D(y) = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; \infty)$$

2. Функцияның анықталу облысын табыңыз:

$$y = \frac{x^2 - 5}{1 - 2\lg x}$$

Шешуі: $D(y)$ екі шартты қанағаттандыруы қажет:

- 1) Логарифмдік функция тек қана оң сандар үшін анықталады;
- 2) Нөлге бөлуге болмайды.

Сонымен,

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - 2\lg x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \lg x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \lg x \neq \lg \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\text{Жауабы: } D(y) = (0; \sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; +\infty]$$

3. Функцияның өзгеру облысын табыңыз: $y = \frac{1}{2 - \cos x}$

Шешуі: $2y - y \cos x = 1 \Rightarrow \frac{2y-1}{y} = \cos x, -1 \leq \cos x \leq 1.$

$$\text{Сондықтан} \quad -1 \leq \frac{2y-1}{y} \leq 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{3}; 1\right]$$

4. Функцияның анықталу облысын табыңыз: $y = \frac{x}{1+x^2}$

Шешуі: Берілген функцияны x арқылы шешейік:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Функцияның өзгеру облысын анықтау үшін $1 - 4y^2 \geq 0, y \neq 0$ теңсіздігін шешу жеткілікті, яғни $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

5. Функцияның жұп немесе тақ функция болатындығын көрсетіңіз:

$$y = \frac{x^2}{\sin 2x}$$

Шешуі: $y(-x) = \frac{(-x)^2}{\sin(-2x)} = \frac{(x)^2}{-\sin 2x} = -\frac{x^2}{\sin 2x}$

Демек, $f(-x) = -f(x)$ теңдігі орындалды, сондықтан функция тақ.

6. Функцияның жұп немесе тақ функция болатындығын көрсетіңіз:

$$f(x) = 4 - 2x^4 + \sin^2 x$$

Шешуі:

$$f(-x) = 4 - 2(-x)^4 + \sin^2(-x) = 4 - 2x^4 + \sin^2 x,$$

Мұнда $f(-x) = f(x)$ теңдігі орындалды, сондықтан берілген функция жұп функция болады.

7. Функцияның жұп немесе тақ функция болатындығын көрсетіңіз:

$$y = x^3 + 2x - 1$$

Шешуі: Бұл функциядағы x - тің орнына $-x$ -ті қойсақ, онда $f(-x) \neq f(x)$ және $f(-x) \neq -f(x)$ болатынын көру қиын емес. Сондықтан функция жұп та емес, тақ та емес.

1.1.2. Сандық тізбектің шегі

Аргументі натурал сан болатын функцияны тізбек деп атайды және x_n арқылы белгілейді:

$$x_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Жалпы мүшесі $x_n = a + (n-1)d$ болатын тізбектің мүшелері арифметикалық прогрессия құрайды, яғни

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d, \dots$$

Келесі тізбек

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{(n-1)}, \dots$$

геометриялық прогрессияны береді, мұның жалпы мүшесі

$$x_n = aq^{n-1}.$$

Анықтама. Егер кез- келген оң ε санына сәйкес натурал n_ε саны табылып, барлық $n > n_\varepsilon$ нөмерлері үшін

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (1.1.1)$$

теңсіздігі орындалса, онда a саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады және былай жазылады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ немесе } n \rightarrow \infty \text{ жағдайда } x_n \rightarrow a$$

Шегі бар болатын тізбек жинақты тізбек деп, ал шегі болмайтын тізбек жинақсыз тізбек деп аталады.

Модуль қасиетінің негізінде $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ немесе $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ теңсіздігімен мәндес.

Бұдан тізбек шегінің тағы бір анықтамасына келеміз.

Егер a нүктесінің кез келген ε маңайы $\{x_n\}$ тізбегінің саны шектеулі $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мүшелерінен өзге барлық мүшелерін қамтитын болса, онда осы a санын $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп атайды.

1. Жалпы мүшесі

$$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{3n}.$$

болатын сан тізбегінің алғашқы төрт мүшелерін табыңыз:

Шешуі: $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{7}{6}, x_3 = \frac{8}{9}, x_4 = \frac{13}{12}, \dots$

2. Сан тізбегінің алғашқы бес мүшесі

$$\frac{2}{2}, \frac{5}{6}, \frac{8}{18}, \frac{11}{54}, \frac{14}{162}, \dots$$

бойынша оның жалпы мүшесінің формуласын жазыңыз.

Шешуі: Тізбек мүшелерінің алымында тұрған сандыр 2, 5, 8, 11, 14 айырмасы 3-ке, 1-мүшесі 2-ге тең арифметикалық прогрессияны құрайды. Сондықтан алымының жалпы түрі арифметикалық прогрессияның жалпы мүшесі $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$ түрінде анықталады. Бөліміндегі сандардың өсу заңдылығы 1-ші мүшесі 2-ге, еселігі 3-ке тең геометриялық прогрессия құрайды. Сондықтан бөлімінің жалпы түрі $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ арқылы өрнектеледі. Сонымен, тізбектің мүшелерінің жалпы мүшесі

$$x_n = \frac{3n - 1}{2 \cdot 3^{n-1}}$$

формуласы арқылы өрнектеледі

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n + 1} = 2 \text{ екенін көрсету керек.} \quad (1.1.2)$$

Шешуі: $\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}$ айырмасын құрамыз.

Егер $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$ болса, онда осы айырманы абсолют шама бойынша

бағалағанда

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad (1.1.3)$$

болады.

Сонымен әрбір оң ε саны үшін $n > N$ болғанда (1.1.3) теңсіздігі орындалатындай $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ саны табылады.

Демек, 2 саны $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$ тізбегінің шегі болады, яғни (1.1.2) теңдігі дұрыс.

4. Жалпы мүшесі $x_n = \frac{n^3+1}{n^3+2}$ болатын сан тізбегінің шектелгендігін дәлелдеу керек.

Шешуі: Берілген сан тізбегін былай жазалық:

$$\frac{n^3+1}{n^3+2} = 1 - \frac{1}{n^3+2}$$

Бұдан $0 < \frac{n^3+1}{n^3+2} < 1$ теңсіздігі шығатыны түсінікті. Демек, $\{x_n\}$ шектелген тізбек.

1.1.3. Функцияның шегі

Анықтама: Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып, $0 < |x - a| < \delta$ шартын қанағаттардыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A санын $f(x)$ функциясының x -тің a -ға ұмтылғандағы шегі деп атайды және $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ деп жазады.

A саны $f(x)$ функциясының $x = a$ нүктесіндегі оң жақтық (сол жақтық) шегі деген факт сәйкес былай жазылады:

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) ,$$

$$A_2 = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) .$$

A саны берілген $f(x)$ функциясының $x \rightarrow a$ -дағы шегі болуы үшін ол функцияның $x = a$ нүктесіндегі оң жақты және сол жақты шектері бар болуы және олардың өзара тең болуы қажетті және жеткілікті

$$f(a-0) = f(a+0) \quad (1.1.4)$$

Егер $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ және $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ шектері бар болса, онда келесі теоремалар дұрыс:

$$1) \lim_{x \rightarrow \alpha} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow \alpha} f_2(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \alpha} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} f_2(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} f_2(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow \alpha} f_2(x) \neq 0);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \alpha} (C \cdot f_1(x)) = C \cdot f_2(x), \quad C - \text{қандай да бір сан.}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x))^m = \left[\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \right]^m, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \alpha} f_1(x) = C \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} f_2(x) = 0 \text{ болсын. Сонда:}$$

а) Егер $|x - a| < \varepsilon$ (мұндағы $\varepsilon > 0$) шартын қанағаттандыратын барлық x үшін

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0 \text{ теңсіздігі орындалса, онда } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = +\infty;$$

б) Егер $|x - a| < \varepsilon$ (мұндағы $\varepsilon > 0$) шартын қанағаттандыратын барлық x

$$\text{үшін } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < 0 \text{ теңсіздігі орындалса, онда } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = -\infty;$$

Келесі шектер жиі қолданылады:

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} ax = \infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a} = \infty$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{a}{x} = -\infty$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a}{x} = +\infty$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{егер } |a| < 1 \text{ болса} \\ +\infty, & \text{егер } a > 1 \text{ болса} \end{cases}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty, \text{ егер } \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0, \text{ егер } \alpha < 0$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$25) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \text{ егер } a > 1$$

Функцияның шегін есептеп шығарудың кейбір тәсілдері:

Егер $x \rightarrow \infty$ жағдайда $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандық кездессе, онда функцияның

шегін табу үшін оның алымы мен бөлімін бөлшек мүшелерінің құрамында кездесетін аргумент x -тің ең жоғары дәрежесіне бөлеміз де, сонан кейін ғана шекке көшеміз.

Егер шек таңбасының астында екі көпмүшеліктің қатынасы тұрса және $x \rightarrow a$ жағдайда алымының да, бөлімінің де шегі нөлге тең болса, ол функцияның шегін табу үшін: әуелі бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеу керек, онан кейін бөлшекті қысқартып, сонан кейін ғана шекке көшу керек.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 5}}$ шегін табыңыз.

Шешуі: Бөлшектің алымын да, бөлімін де x -ке бөлеміз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{5}{x^3}}} = 1.$$

Егер $P_n(x)$ және $Q_m(x)$ сәйкес n -ші және m -ші дәрежелі көпмүшеліктер болса, онда олардың қатынастарының шегін тікелей табуға болады.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, & \text{егер } m < n \\ \frac{A}{B}, & \text{егер } m = n \\ \infty, & \text{егер } m > n \end{cases}$$

Мұндағы: А, В- $P_n(x)$ және $Q_m(x)$ көпмүшеліктерінің аға коэффициенттері.

2. Шекті табыңыз $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x+2}$

Шешуі: $x \rightarrow 2$ болғандықтан, бөлшек алымы $3 \cdot 2 + 1 = 7$ -ге, ал бөлімі $2 + 2 = 4$ -ке ұмтылады.

Сонымен, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{7}{4}$.

Егер $P_n(a) = Q_m(a) = 0$ болса, онда $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ бөлшегін $(x-a)$ екімүшеге бір немесе бірнеше рет бөлуді ұсынады..

3. Шекті табыңыз $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

Шешуі: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x-2)}{(x-3) \cdot (x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}$.

Иррациональдық өрнекті көптеген жағдайда жаңа айнымалы енгізу арқылы рациональдық түрге келтіріледі.

Иррациональдық өрнектен шекті табудың әдістерінің бірі – иррациональдықты алымынан бөліміне немесе керісінше бөлімінен алымына көшіру болып табылады.

Шешуі:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{\varphi(x)}$ түріндегі шекті табуда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ болса, онда $f(x) = 1 + \alpha(x)$, мұндағы $\alpha(x) \rightarrow 0$,

$x \rightarrow a$ болғанда, сонымен,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \alpha(x) \right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right]^{\alpha(x)\varphi(x)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1)\varphi(x)}\end{aligned}$$

мұндағы $e \approx 2,718...$ – неперлік сан.

5. Шекті табыңыз $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Шешуі: Жоғарыдағы түлендірулерді жүргізгенде:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{x}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\left(1 + \frac{x-2}{2} \right)^{\frac{2}{x-2}} \right]^{\frac{x-2}{2} \cdot \frac{1}{x-2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2(x-2)}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}\end{aligned}$$

екенін аламыз.

Жалпы жағдайда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x &= e^k \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} &= k\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

формулаларды есте сақтау өте пайдалы.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{Бірінші тамаша шек}), \tag{1.1.6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (\text{Екінші тамаша шек}) \tag{1.1.7}$$

Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ бар және оң болса, онда

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$

формула шек табуда жиі қолданылады.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^k)}{x^k} = 1$ екенін дәлелдеңіз.

Шешуі: Берілген шекті жоғарыда көрсетілген формулаларының көмегімен түрлендірейік:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^k)}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^k} \ln(1+x^k) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(1+x^k)^{\frac{1}{x^k}} \right) = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^k)^{\frac{1}{x^k}} \right) = \ln e = 1\end{aligned}$$

Сонымен,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^k)}{x^k} = 1 \quad (1.1.8)$$

болатынын дәлелдедік.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^k} - 1}{x^k}$ шегін табыңыз.

Шешуі: Бұл шекті табу үшін $a^{x^k} - 1 = t^k$ алмастыруын жасау керек. Сонда

$$a^{x^k} = t^k + 1, \quad x^k \ln a = \ln(t^k + 1), \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$$

Бұдан кейін (1.1.8) формуласын пайдаланамыз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^k} - 1}{x^k} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^k}{\ln(1+t^k)} = \frac{\ln a}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t^k)}{t^k}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a$$

Жалпы жағдайда

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a$$

болатынын есте сақтау керек.

8. $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ функциясының $x \rightarrow 0$ - дағы оң жақты және сол жақты шектерін табу керек.

Шешуі: Бұл функцияның $x \rightarrow 0+0$ және $x \rightarrow 0-0$ ұмтылғандағы шектерін есептейік:

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\arctg \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2},$$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \left(\arctg \frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

9. Функцияның $x \rightarrow 1$ болғандағы бір жақты шектерін табыңыз:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{егер } x \leq 1 \\ 3x - 5, & \text{егер } x > 1 \end{cases} \quad \cdot \cdot$$

Шешуі: а) $x \leq 1$ болсын. Сонда $f(x) = -2x + 3$, демек $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1$ -сол жақты шегі.

б) $x > 1$ болсын, онда $f(x) = 3x - 5$. Сонымен, $f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -2$ -оң жақты шегі.

1.1.4. Ақырсыз аз және ақырсыз үлкен функциялар

Егер $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ болса, онда $x \rightarrow a$ жағдайда $\alpha(x)$ ақырсыз аз функция деп аталады. $f(x)$ функциясының $x \rightarrow a$ -дағы шегі A саны болу үшін $f(x) = A + \alpha(x)$, мұндағы $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Егер кез келген $E > 0$ саны үшін $\delta = \delta(E) > 0$ саны табылып, $0 < |x - a| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x)| > E$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы $x \rightarrow a$ жағдайда ақырсыз үлкен функция деп аталады және былай жазылады:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Осы сияқты

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

ақырсыз үлкен функцияларды айтуға болады.

Егер $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ және $x \neq a$ болғанда $\alpha(x) \neq 0$ болса, онда $x \rightarrow a$ жағдайда $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ функциясы ақырсыз үлкен болады.

Осы сияқты, егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ болса, онда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Мысалы: $y = \cos x \left(x \rightarrow \frac{\pi}{2} \right)$ және $y = \frac{x-3}{4} (x \rightarrow 3)$ ақырсыз аз функциялар болса, онда $\frac{1}{\cos x} \left(x \rightarrow \frac{\pi}{2} \right)$, $y = \frac{x-3}{4} (x \rightarrow \infty)$ функциялары ақырсыз үлкен болады.

Егер $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x-5} = \infty$ болса, онда $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3x-5}} = 0$.

Егер $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ немесе $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$ болса, онда $x \rightarrow a$ жағдайда

реттілігі бірдей $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функцияларын эквивалентті ақырсыз аз функциялар деп атайды да, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ($x \rightarrow a$) деп белгілейді.

Төмендегі ақырсыз аз функциялардың $x \rightarrow 0$ жағдайда эквиваленттігінің мысалдары келтірілген:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
3. $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$
4. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
6. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
7. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
($a > 0$)
8. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
9. $(1 + \alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x)$
10. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$
11. $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim \frac{x}{2}$
12. $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$

Егер $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ болса, онда $x \rightarrow a$ жағдайда $\alpha(x)$ функциясын

$\beta(x)$ функциясына қарағанда реттілігі жоғары ақырсыз аз функция деп атайды және де $\alpha(x) = O(\beta(x))$ деп белгілейді.

Егер $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, $C = \text{const}$ болса, онда $x \rightarrow a$ жағдайда

$\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функцияларын реттілігі бірдей ақырсыз аз функциялар деп атайды.

Мысалдар қарастырайық.

1. Шекті табыңыз $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 2x^5}{3x^2 + 2x^3}$.

2. **Шешуі:** $x \rightarrow 0$ болғанда $\alpha(x) = 5x^2 + 2x^5$, $\beta(x) = 3x^2 + 2x^3$ – ақырсыз аз функциялар, сонда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 2x^5}{3x^2 + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + 2x^3}{3 + 2x} = \frac{5}{3}.$$

Қатынастың шегі нөлден өзгеше сан. Сонымен, α , β - реттері бірдей ақырсыз аз функциялар.

2. Шекті табыңыз $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1 + 3x)}$.

Шешуі: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{3x} = \frac{1}{3}$.

3. $\sqrt{1,06}$ және $\sqrt{0,994}$ түбірлердің мәндерін жуықтап есептеңіз.

Шешуі: $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$ формуласын берілген есепке қолдансақ, онда төмендегі жуық мәндерді аламыз:

$$\sqrt{1+0,06} \sim 1 + \frac{0,06}{2} = 1,03 ;$$

$$\sqrt{0,994} = \sqrt{1-0,006} \sim 1 - \frac{0,006}{2} = 0,997.$$

1.1.5. Функцияның үзіліссіздігі

$y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болу үшін:

- 1) x_0 нүктесінде функцияның анықталуы;
- 2) $x \rightarrow x_0$ жағдайда ақырлы шегі болуы;
- 3) Бұл шек функцияның x_0 нүктесіндегі мәніне тең болуы, яғни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) \quad (1.1.9)$$

шарттары орындалу керек.

(1.1.9) теңдіктен:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

яғни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (1.1.10)$$

(мұндағы $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$)

Егер берілген $f(x)$ функциясының аргументінің шексіз аз өсімшесіне функцияның да шексіз аз өсімшесі сәйкес келсе, ол x_0 нүктесінде үзіліссіз функция деп аталады.

Егер

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

шартты орындалса, функция x_0 нүктесінде сол жағынан үзіліссіз, ал

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

орындалса, $f(x)$ x_0 нүктесінде оң жағынан үзіліссіз функция деп аталады.

$f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болуы үшін

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (1.1.11)$$

шарты орындалуы қажетті және жеткілікті.

Егер

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$$

орындалса, онда x_0 нүктесін жөнделінетін үзіліс нүктесі дейміз.

Егер $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, онда x_0 жөнделмейтін I-ші текті үзіліс нүктесі деп аталады, ал $|f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ санын $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі секірісі дейді.

Жөнделетін үзіліс нүктелері мен функцияның ақырлы секірісі бар болатын үзіліс нүктелерін бірінші текті үзіліс нүктелері деп атайды.

Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы анықталмаған және біржақты $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ шектерінің ең болмағанда біреуі жоқ немесе шексіздікке тең болса, онда x_0 нүктесін $f(x)$ функциясының екінші текті үзіліс нүктесі деп атайды.

1. $f(x) = x^2$ функциясы $x \in R$ үшін үзіліссіз екенін дәлелдеңіз.

Шешуі:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^2 = x_0^2 = f(x_0)$$

$y = x^2$ функциясы $x = x_0$ нүктесінде үзіліссіз, себебі үзіліссіздіктің үш шарты орындалады.

2.
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{егер } x < 0, \\ x^2, & \text{егер } 0 \leq x < 1 \\ 2, & \text{егер } x \geq 1. \end{cases}$$
 функциясы берілген.

Кез-келген $x \in R$ үшін функцияны үзіліссіздікке зерттеңіз..

Шешуі: 1) $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$ болсын. Сонда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында төмендегі элементарлық функциялардың біреуі болады:

$$y = x, (x < 0); y = x^2, (0 \leq x < 1), y = 2 (x \geq 1).$$

Сондықтан x_0 –үзіліссіздік нүктесі.

2) Үзіліс $x = 0$ және $x = 1$ нүктелерінде болуы мүмкін.

$$f(0) = 0^2 = 0, \quad f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} x = 0,$$

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^2 = 0^2 = 0, \quad f(0) = f(0-0) = f(0+0)$$

Демек, $x = 0$ - үзіліссіздік нүктесі.

$x = 1$. Бұл жағдайда

$$f(1) = 2, \quad f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} x^2 = 1, \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} 2 = 2.$$

$1 \neq 2$, онда (1.1.11) шарты орындалмайды және $x = 1$ нүктесі үзіліссіздік нүктесі болмайды. $x = 1$ нүктесінде функция үзілісті болады.

$|f(1-0) - f(1+0)| = |1 - 2| = 1$, функцияның секірісі 1-ге тең. $x = 1$ - бірінші текті үзіліс нүктесі.

1.2. БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕРІ

1.2.1. Туынды. Дифференциалдау ережелері

Қандай да болса бір $[a, b]$ аралығында анықталған функция $y = f(x)$ берілсін.

x_0 деп x -тің $[a, b]$ аралығында кез-келген бір мәнін белгілейік. Аргумент x -тің бастапқы мәні x_0 -ге Δx өсімшесін берсек (Δx өсімшесі оң да, теріс те бола алады), аргументтің жаңа мәні $x_0 + \Delta x$ -ке келеміз.

Аргументтің жаңа мәні де $[a, b]$ аралығында болуы тиіс. Сонда берілген

$y = f(x)$ функциясы да жаңа мән қабылдайды, ол

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$$

болады да, функцияның өсімшесі

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

болады.

Сонан кейін функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

табамыз. Әрине, бұл Қатынас Δx -тің функциясы.

Егер функция өсімшесінің өзінің пайда болуына себепші болған тәуелсіз айнымалының өсімшесіне Қатынасының шегі болса, яғни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.2.1)$$

бар болса, бұл шек $y = f(x)$ функциясының тәуелсіз айнымалы x бойынша алынған x_0 нүктесіндегі туындысы деп аталады, оны y' немесе $\frac{dy}{dx}$ арқылы белгілейді, яғни

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Берілген $f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$ - ті іздеп табу амалы ол функцияны дифференциалдау деп аталады. Дифференциалдау ережелері мен туындылардың қасиеттері туралы ілім дифференциалдық есептеу деп аталады.

$y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болу үшін ол функцияның сол нүктеде ақырлы туындысы болуы жеткілікті.

$y = f(x)$ қисығының абсциссасы x_0 -ге тең нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті $f(x)$ функциясының туындысы $f'(x_0)$ -ге тең болады, яғни

$$y' \Big|_{x=x_0} = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = k \quad (1.2.2)$$

Демек, $f(x)$ функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуі былай жазылады:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1.2.3)$$

Сондай-ақ x нүктесіндегі функция өзгерісінің жылдамдығын және кез-келген t уақыт мезгілінде еңбек өнімділігін туынды деп түсінеміз, функцияның туындысы болуы үшін

$f'_-(x) = f'_+(x)$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті, мұндағы

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1.2.4)$$

Егер $f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысы шексіздікке тең болса ($f'(x) = \infty$), онда $y = f(x)$ функциясының графигіне x нүктесінде жүргізілген жанама Ox өсіне перпендикуляр болады.

Егер $u = u(x)$, $v = v(x)$ туындылары бар функциялар болып, $c = \text{const}$ болса, онда негізгі дифференциалдау ережелері төмендегідей болады:

$$1) c' = 0 \quad 2) (u \pm v)' = u' \pm v' \quad 3) (cu)' = cu'$$

$$4) (uv)' = u'v + vu' \quad 5) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - vu'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Егер $u = \varphi(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданса, ал $y = f(u)$ функциясы $u_0 = \varphi(x_0)$ нүктесінде дифференциалданса, онда күрделі функция $y = f(\varphi(x))$ x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция деп аталып, оның туындысы былай табылады.

$$y'_x(x_0) = y'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0) \quad (1.2.5)$$

1.2.2. Элементарлық функцияларды дифференциалдау кестесі

$$1) (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad , \quad 2) (\sin u)' = (\cos u)' \cdot u'$$

$$3) (\cos u)' = -\sin u \cdot u' \quad , \quad 4) (tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u} \quad ,$$

$$5) (ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \quad , \quad 6) (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad ,$$

$$7) (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \quad , \quad 8) (e^u)' = e^u \cdot u' \quad ,$$

$$9) (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad , \quad 10) \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad ,$$

$$11) (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' \quad , \quad 12) (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad ,$$

$$13) (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad 14) (\arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2} \quad ,$$

$$15) (\text{arcctgu})' = -\frac{u'}{1+u^2} \quad ,$$

16) Егер:

1) x_0 нүктесінде $y = f(x)$ функциясының нөлге тең емес туындысы $f'(x_0)$ бар болса,

2) тура функция $y = f(x)$ -ке кері функция $x = \varphi(y)$ бар болса,

3) бұл кері функция $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $x = \varphi(y)$ кері функцияласының y_0 нүктесінде туындысы бар және ол мына формула бойынша табылады:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

немесе

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad (1.2.6)$$

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$$

функциясын дәреже-көрсеткіштік функция деп атайды.

Бұл функцияның туындысын табу үшін логарифмдік дифференциалдау тәсілін қолданады, яғни берілген функцияны әуелі логарифмдеп алып, соның нәтижесінде пайда болған функцияға ғана дифференциалдау ережелерін қолданады. Логарифмдік диф-ференциалдаудың нәтижесін логарифмдік туынды деп атайды.

Осы айтылған тәсілді қолдансақ:

$$\ln y = \varphi(x) \ln f(x),$$

$$(\ln y)' = [\varphi(x) \ln f(x)]', \quad \text{болады.}$$

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \ln f(x) + \frac{\varphi(x) f'(x)}{f(x)},$$

Демек

$$y' = y \left[\varphi'(x) \ln f(x) + \frac{\varphi(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right]$$

немесе

$$\left\{ [f(x)]^{\varphi(x)} \right\}' = [f(x)]^{\varphi(x)} \left[\varphi'(x) \ln f(x) + \frac{\varphi(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right] \quad (1.1.7)$$

1. Функцияның туындысын табыңдар: $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}$

$$\begin{aligned} \text{Шешуі: } y' &= \left(\frac{2^{3x}}{3^{2x}} \right)' = \frac{2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot 3 \cdot 3^{2x} - 2^{3x} \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3 \cdot 2}{(3^{2x})^2} = \\ &= \frac{2^{3x} \cdot 3^{2x} (3 \ln 2 - 2 \ln 3)}{3^{4x}} = \frac{2^{3x} (\ln 8 - \ln 9)}{3^{2x}} = \left(\frac{8}{9} \right)^x \ln \left(\frac{8}{9} \right) \end{aligned}$$

2. Функцияның туындысын табыңдар: $y = (\sin x)^{\cos x}$

Шешуі

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\cos x} = \cos x \ln \sin x, \quad (\ln y)' = (\cos x \ln \sin x)' = (\cos x)' \ln \sin x +$$

$$+ \cos x (\ln \sin x)' = -\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x} = -\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x},$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x \right)$$

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x \right)$$

1.2.3. Айқындалмаған функцияның туындысын табу

Егер x пен y -тің арасындағы байланыс айқындалмаған түрде мына

$$F(x, y) = 0 \quad (1.2.8)$$

теңдеумен берілсе, онда y'_x туындысын табу үшін:

1) (1.2.8) теңдеудегі y -ті x -тен тәуелді функция деп қарап теңдеудің, сол жағынан x бойынша туынды алу керек;

2) осы туындыны нөлге теңестіру керек, яғни

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$$

3) алынған теңдеуді y' арқылы шешу керек

$$1. F(x, y) = xy - \arctg \frac{x}{y} = 0$$

айқындалмаған функцияның туындысын табу керек.

Шешуі: $y = y(x)$ функциясы айқындалмаған $F(x, y) = 0$ теңдеуімен беріліп тұр. Сондықтан $F(x, y(x)) \equiv 0$ теңбе-теңдікті күрделі функция ретінде x аргументі бойынша дифференциалдап, сонда шығатын теңдеуден y' туындысын есептеп шығарамыз, яғни

$$\begin{aligned} \left(xy - \arctg \frac{x}{y} \right)' &= (xy)' - \left(\arctg \frac{x}{y} \right)' = \\ &= y + xy' - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - y'x}{y^2}; \\ y + xy' - \frac{y - y'x}{x^2 + y^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{бұдан } y' = \frac{y(1-x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)}.$$

1.2.4. Жоғары ретті туындылар

Шектеулі $y' = f'(x)$ туындысы бар $y = f(x)$ функциясын қаралық. Бұл $f'(x)$ туындының өзі тәуелсіз айнымалы x -тің функциясы болып табылады, сондықтан одан тағы да x бойынша туынды алуға болады. Сонда

$$(y')' = (f'(x))' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

Әдетте, бұл былай жазылады:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

1. Мына $y = \arctg 2x$ функциясының екінші ретті туындысын табыңыз?

$$\text{Шешуі: } y' = \frac{2}{1+4x^2}; y'' = \frac{-2(1+4x^2)'}{(1+4x^2)^2} = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2}$$

1.2.5. Қисыққа жүргізілген жанама туралы есептер

$y = f(x)$ қисығына осы қисықтың $(x_0; y_0)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті $f'(x)$ функциясы туындысының x_0 нүктедегі мәніне тең:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = y' \Big|_{x=x_0}$$

Қисыққа $M(x_0; y_0)$ нүктесінде жүргізілген жанама:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

1. $f(x) = x - x^2$ функциясының графигіне абсциссасы $x_0 = 1$ нүктесінде жүргізілген жанама OX өсімен қандай бұрыш жасайды?

$$\text{Шешуі: } f'(x) = 1 - 2x, f'(1) = 1 - 2 \cdot 1 = -1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

2. $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ функциясының графигіне оның OY өсімен қиылысу нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңыздар.

Шешуі: Әуелі OY өсімен қиылысу нүктесін табалық.

Ол үшін $x_0 = 0$ деп қабылдап, $y_0 = f(x_0) = -3$ табамыз. Енді жанаманың бұрыштық коэффициентін табамыз:

$$f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}, \quad f'(x_0) = f'(0) = -4$$

Олай болса $(0; -3)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуі:

$$Y = -3 - 4(x - 0) = -4x - 3.$$

1.2.6. Функцияның дифференциалы

Анықтама: Аргумент өсімшесі Δx -ке сәйкес $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі дифференциалы деп $df(x_0)$ немесе $dy(x_0)$ белгілерімен белгіленетін $f'(x_0)\Delta x$ санын айтады.

Сонда анықтама бойынша

$$dy = f'(x_0)\Delta x \quad (1.2.9)$$

Егер $y = f(x)$ функциясы (a, b) интервалының кез - келген x нүктесінде дифференциалданатын болса, онда (1.2.9) формуласы мына түрде жазылады:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad (1.2.10)$$

мұндағы $\Delta x = dx = x'\Delta x = \Delta x$, демек

$$dy = f'(x)dx \quad (1.2.11)$$

1. $y = 2x^2 - x$ функциясының өсімшесін және туындысын табыңыз..

Шешуі:

1-ші әдіс: $\Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - (2x^2 - x) = (4x - 1)\Delta x + 2(\Delta x)^2$

Сонымен, $dy = (4x - 1)\Delta x = (4x - 1)dx$.

2-ші әдіс: $y' = 4x - 1$, $dy = y'dx = (4x - 1)dx$.

2. $y = 2x^2 - x$ функциясының $x = 1$ және $\Delta x = 0,01$ болғандағы Δy және dy -ті табу керек.

Шешуі: $\Delta y = (4x - 1)\Delta x + 2(\Delta x)^2 = 3 \cdot 0,01 + 2(0,01)^2 = 0,0302$

$$dy = (4x - 1)\Delta x = 3 \cdot 0,01 = 0,0300.$$

Дифференциалды жуықтап есептеулерге қолдану. Егер аргументтің Δx өсімшесі абсолют шама бойынша аз болса, онда $y = f(x)$ функцияның dy

дифференциалы және функцияның өсімшесі Δy жуық шамамен бір-бірімен тең, $\Delta y \approx dy$, яғни $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$. Бұдан

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \quad (1.2.11)$$

1.2.7. Лопиталь ережесі

1⁰ Анықталмағандық $\left(\frac{0}{0}\right)$. Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ және

туындыларының қатынасының a нүктедегі шегі бар болса, онда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

2⁰ Анықталмағандық $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ және

туындыларының қатынасының a нүктедегі шегі бар болса, онда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3⁰ $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 анықталмағандықтар алгебралық түрлендірулер арқылы $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ және $\left(\frac{0}{0}\right)$ анықталмағандықтарына келтіріледі.

а) $\left(\frac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандықтарды айқындау (ашу).

Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ болса, онда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad (2.8.1)$$

Егер соңғы шек $x \rightarrow a$ жағдайда тағы да $\left(\frac{0}{0}\right)$ түрінде болса, онда осы процесті әрі қарай соза береміз, яғни шек анықталған мезгілде x -тің орнына мәнін қойып қорытынды шығарамыз.

Мысалдар қарастырайық.

1. Шекті табыңыздар: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x}$

Шешуі: Бұл шекте $x \rightarrow 0$ жағдайда $\left(\frac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандық шығады. Сондықтан Лопиталь ережесін қолданамыз, яғни

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{0}{1} = 0$$

2. Шекті табыңыздар: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

Шешуі: Бұл шекте анықталмағандықтың түрі $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Демек, Лопиталь ережесін қолданамыз, яғни

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0; \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ шегін табыңыздар.

Шешуі:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

1.2.8. Функцияның өсуі мен кемуі

Егер $y = f(x)$ функциясы (a, b) аралығында дифференциалданатын функция және барлық $x \in (a, b)$ үшін оның туындысы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) болса, онда осы аралықта $y = f(x)$ функциясы өспелі (кемімелі) болады.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ функциясының өсетін және кемитін аралығын табыңыздар?

Шешуі: Функцияның туындысын тауып, оны нөлге теңестірейік, яғни

$$f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

$$2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Сонда, сан түзуінде $(-\infty; 1)$ және $(1; +\infty)$ аралықтары табылады.

Егер $x \in (-\infty; 1)$, онда $y' < 0$. Сондықтан бұл аралықта $y = f(x)$ функциясы кемиді. Егер $x \in (1; +\infty)$, онда $y' > 0$. Демек, берілген функция бұл аралықта өседі.

2. $f(x) = \frac{1}{x + 3}$ функцияның өсетін және кемитін аралықтарын табыңыздар.

Шешуі: $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$. $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$, $x \neq -3$

$f'(x) < 0$, егер $x \neq -3$ болса. Сондықтан берілген $f(x)$ функциясы $(-\infty; -3)$ және $(-3; +\infty)$ аралығында кемімелі болады.

3. $y = x^3 - 3x$ функциясын монотондылыққа зерттеңіз.

Шешуі: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. $(-\infty; -1)$ аралығында $y' > 0$, $(-1; 1)$ аралығында $y' < 0$, ал $(1; +\infty)$ аралығында $y' > 0$. Демек, берілген функция $(-\infty; -1)$ және $(1; +\infty)$ аралықтарында өспелі, $(-1; 1)$ аралығында кемімелі.

1.2.9. Функцияның экстремумдары

Айталық, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ болсын. Сонда x_0 экстремум нүктесі болады. Сонымен бірге $f''(x_0) < 0$ болғанда, x_0 максимум нүктесі де, ал $f''(x_0) > 0$ болғанда, x_0 минимум нүктесі болады.

Төмендегі функцияларды экстремумға зерттеңіздер:

1. $f(x) = x^3 - 12x$.

Шешуі: $f'(x)$ туындысын тауып, оны нөлге теңестіріп $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 12, 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$$

түбірлерін табамыз, яғни $f''(x) = 6x$

Сонда $f''(-2) < 0$, $f''(2) > 0$

Демек, $x = -2$ нүктесінде $f(x)$ - тің максимум, $x = 2$ нүктесінде - минимумы бар болып шықты:

$$y_{\max} = y(-2) = -8 + 24 = 16, y_{\min} = y(2) = 8 - 24 = -16$$

1.2.10. Қисықтың дөңестігінің бағыты және иілу нүктелері

Айталық, $y = f(x)$ функциясы (a, b) интервалында екі рет дифференциалданатын болсын, онда барлық $x \in (a, b)$ үшін $f''(x) < 0$ орындалғанда функцияның графигі дөңес болады. Ал барлық $x \in (a, b)$ үшін $f''(x) > 0$ болса, онда (a, b) интервалында $f(x)$ функциясының графигі ойыс болады.

Айталық (a, b) интервалында $y = f(x)$ функциясының екінші ретті үзіліссіз туындысы бар болсын дейік, сонда $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесі функция

графикінің иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0) = 0$ болады. Ал $f''(x_0) \neq 0$ болса, онда иілу нүктесі жоқ дейміз.

Сонымен, ойыстан дөңеске немесе дөңестен ойысқа ауысатын шекарадағы $(x_0, f(x_0))$ нүктесін берілген $y = f(x)$ функциясының иілу нүктесі деп атайды.

Демек, берілген функцияның графикінің ойыс, дөңес аралығын және иілу нүктелерін табу үшін:

- 1) берілген функциядан екінші ретті туынды ($f''(x)$) табу керек,
- 2) екінші туынды нөлге айналатын ($f''(x) = 0$) немесе жоқ болатын нүктелерді табу керек
- 3) табылған нүктелердің оң және сол жақтарындағы екінші ретті туындының таңбасын анықтау керек те, әрбір интервалдарға ойыс, дөңес және иілу нүктелерін табу керек.
- 4) иілу нүктесіндегі функцияның мәнін табу керек.

Мына төменде берілген функциялардың ойыс, дөңес аралықтарын және иілу нүктелерін табыңдар:

1. $f(x) = x^3 - 11x^2 + 39x + 5$

Шешуі: Берілген функциядан бірінші және екінші туынды табалық:

$$f'(x) = 3x^2 - 22x + 39, \quad f''(x) = 6x - 22, \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 22 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$$

Егер $x \in \left(-\infty, \frac{11}{3}\right)$, онда $f''(x) < 0$. Демек қисық дөңес болады, ал $x \in \left(\frac{11}{3}, +\infty\right)$, онда $f''(x) > 0$. Бұл жағдайда қисық ойыс. Функцияның

$$x = \frac{11}{3} \text{ нүктесіндегі мәнін табалық, яғни } f\left(\frac{11}{3}\right) = 12.$$

Сонымен, $y = f(x)$ функциясының $M\left(\frac{11}{3}; 12\right)$ нүктесі иілу нүктесі болады.

2. $f(x) = e^{-x^2}$

Шешуі: $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$ екінші туындысы

нөлге теңестіріп, екінші текті сындық нүктелер $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ және $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ табамыз.

Бұл нүктелер сан түзуін $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$ аралықтарға бөледі. Әрбір аралықтағы $f''(x)$ -тің таңбасы сәйкес $+$, $-$, $+$ екенін байқаймыз.

Сондықтан:

1) егер $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ болса, онда қисық ойыс;

2) егер $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, онда қисық дөңес болады.

Иілу нүктесі $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

1.2.11. Қисықтың асимптоталары

Егер $y = f(x)$ функциясы үшін $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ немесе $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ шектерінің ең болмағанда біреуі $+\infty$ - ке не $-\infty$ -ке тең болса, онда $x = a$ түзуі функция графигінің тік асимптотасы деп аталады.

$y = b$ түзуі $y = f(x)$ қисығының көлденең асимптотасы болуы үшін

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (\text{немесе} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

болуы қажетті және жеткілікті.

$y = kx + b$ түзуі $y = f(x)$ функциясының графигінің көлбеу асимптотасы болу үшін ақырлы шектер

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

пен

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$$

бар болуы қажетті және жеткілікті.

1. $y = f(x) = \frac{3x}{x-1} + 3x$ қисығының асимптоталарын табу керек.

Шешуі: Қисықтың тік асимптотасы $x = 1$, себебі

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty.$$

Көлбеу асимптотасын іздейік

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x}{x-1} + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x(x-1)} = 3,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x - 3x \right) = 3.$$

Сонымен $y = 3x + 3$ түзуі көлбеу асимптотасы болады.

1.2.12. Функцияның графигін салу

Функцияны зерттеп оның графигін салудың жалпы схемасы:

I - функцияның анықталу облысын табу;

II - функцияның графигінің координаталар өсімен қиылысу нүктелерін табу;

III - функцияның жұп, тақ болуын тексеру

IV - функцияның экстремумын және өсетін, кемитін аралықтарын табу.

V - функцияның графигінің ойыс, дөңес аралықтарын және иілу нүктелерін табу;

VI - функция графигінің асимптоталарын табу;

VII а) Егер анықталу облысы $[a, b]$ аралығы болса, онда $f(a)$ және $f(b)$ мәндерін есептеу керек;

б) Егер анықталу облысы (a, b) аралығы болса, онда мына төмендегі шектерді табу керек:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$$

с) Егер функция $x = c$ нүктесінде үзілісті болса, онда біржақты шектерді табу керек, яғни

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$$

$$1. f(x) = \frac{1+x^2}{x^2-1} \quad \text{функциясының графигін салыңыз.}$$

Шешуі: 1. Бұл функция анықталу үшін оның бөлімі нөлге тең болмау керек

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x_{1,2} \neq \pm 1.$$

Демек

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

Сонымен сан түзуінің $x = \pm 1$ нүктелерінен басқа барлық нүктелерінде берілген функция анықталған.

2. $f(x)$ функциясы ордината өсімен $(0; -1)$ нүктесінде қиылысады, ал $f(x) = 0$ теңдеуінің шешімі жоқ болғандықтан функцияның графигі Ox өсімен қиылыспайды.

$$3. f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = f(x) \quad \text{теңдігі орындалғандықтан}$$

функция жұп болады. Сондықтан оның графигі Oy өсіне қарағанда симметриялы болады.

4. Зерттеліп отырған функцияның экстремумын табайық, ол үшін

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 - 1) - (1 + x^2) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 - 2x - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{-4x^2 + 4 + 16x^2}{(x^2 - 1)^3} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3} = \frac{4(1 + 3x^2)}{(x^2 - 1)^3}$$

Бірінші ретті туындыны нөлге теңейміз: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$,

ал $f''(0) = -4 < 0$, яғни $x = 0$ нүктесінде функцияның максимумы бар, яғни $y_{\max} = y(0) = -1$. Берілген функция $(-\infty; -1)$ және $(-1; 0)$ аралығында өседі, себебі бұл аралықтарда $f'(x) > 0$. Ал $(0; 1)$ және $(1; +\infty)$ аралығында функция кемиді, өйткені $f'(x) < 0$.

5) x -тің ешқандай мәнінде екінші ретті туынды нөлге айналмайды. Сондықтан иілу нүктесі жоқ. Функцияның графигі $(-\infty; -1)$ және $(1; +\infty)$ аралығында ойыс болады, себебі $f''(x) > 0$, ал $(-1; 1)$ аралығында дөңес, өйткені $f''(x) < 0$.

6) Функцияның тік асимптоталарын табайық:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty;$$

Демек $x=1$ түзуі функция графигіне тік асимптота болады. Сондай-ақ функция графигінің симметриялы екенін ескерсек, $x=-1$ түзуі де тік асимптота болады, ал

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + x^2}{x^2 - 1} = 1$$

Сондықтан $y=1$ түзуі функцияның көлденең асимптотасы болады.

Көлбеу асимптотасын іздейік:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)'}{((x^2 - 1)x)'} =$$

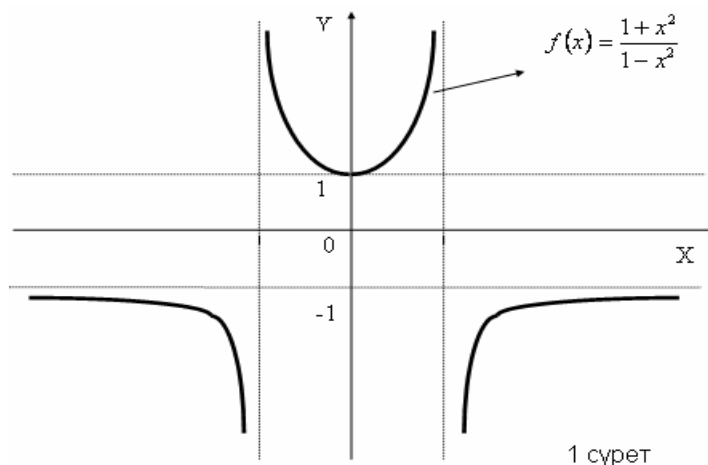
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x \cdot x + (x^2 - 1) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{6x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

Сонымен функцияның графигінің көлбеу асимптотасы жоқ.

Міне, осы айтылғандардың барлығын еске алып, функцияның графигін саламыз (1 сурет).



1.3. БІР АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕРІ

1.3.1. Анықталмаған интеграл. Тікелей интегралдау.

Анықталмаған интегралдың қасиеттері:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

$$\int \left(\int f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Негізгі интегралдардың кестесі:

$$1. \int 0 \cdot dx = C,$$

$$2. \int dx = x + C,$$

$$3. \int x^{\alpha} \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1,$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$$

($a > 0, a \neq 1$)

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C,$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x + C,$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C,$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$
13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C,$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm k} \right| + C,$
16. $\int \sqrt{x^2+k} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2+k} + k \ln(x + \sqrt{x^2+k}) \right] + C,$
17. $\int \operatorname{tg} x \cdot dx = -\ln |\cos x| + C,$
18. $\int \operatorname{ctg} x \cdot dx = \ln |\sin x| + C,$
19. $\int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C.$

Жалпы жағдайда кестеде келтірілген интегралдардың дұрыстығын интегралдың 1-ші қасиетін пайдаланып тексеруге болады.

1. Интегралдарды табыңыз

1. $\int (x^3 + 2\sqrt{x} + \sin x - 3^x) dx,$
2. $\int \left(\frac{2}{x} - \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}} + 19 \right) dx,$

Шешуі: Интегралдың 5-ші қасиетін және кестелік интегралдарды пайдалансақ, онда

$$\begin{aligned} & \int (x^3 + 2\sqrt{x} + \sin x - 3^x) dx = \int x^3 dx + 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \\ & 1) + \int \sin x dx - \int 3^x dx = \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x\sqrt{x}}{3} - \cos x + \frac{3^x}{\ln 3} + C, \\ & \int \left(\frac{2}{x} - \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}} + 19 \right) dx = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \cos x + \\ & 2) + \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 19 \int dx = 2 \ln|x| - \sin x + 2\sqrt{x} + 19x + C. \end{aligned}$$

2. Интегралдарды табыңыз

$$a) \int \frac{3 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 4 \operatorname{ctg}^2 x}{5 \cos^2 x} dx, \quad б) \int \frac{(3^x - 2^x)^2}{6^x} dx.$$

Шешуі: Интеграл белгісінің астындағы функцияны түрлендіріп, содан кейін кестелік интегралдарды пайдаланамыз.

$$\begin{aligned} a) \int \left[\frac{3}{5} - \frac{2 \sin^2 x}{5 \cos^2 x} + \frac{4 \operatorname{ctg}^2 x}{5 \cos^2 x} \right] dx &= \frac{3}{5} \int dx - \frac{2}{5} \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx + \\ &+ \frac{4}{5} \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \frac{3}{5} x + \frac{2}{5} \int dx - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{3}{5} x + \frac{2}{5} x - \frac{2}{5} \operatorname{tg} x - \frac{4}{5} \operatorname{ctg} x + C = x - \frac{2}{5} \operatorname{tg} x - \frac{4}{5} \operatorname{ctg} x + C \\ б) \int \frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 2^x + 2^{2x}}{(2 \cdot 3)^x} dx &= \int \left[\left(\frac{3}{2} \right)^x - 2 + \left(\frac{2}{3} \right)^x \right] dx = \\ &= \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^x}{\ln \frac{3}{2}} - 2x + \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + C; \end{aligned}$$

1.3.2. Белгісізді ауыстыру әдісі

Анықталмаған интегралға $x = \varphi(t)$ ауыстыруын жасап, оны мына түрге келтірелік:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \quad (1.3.1)$$

Осы (1.3.1) формуласын интегралдағы айнымалыны ауыстыру формуласы дейді.

Айнымалыны ауыстыру формуласының ең қарапайым түрі:

$$1) \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (1.3.2)$$

$$2) \int \frac{u' du}{u} = \ln|u| + C \quad (1.3.3)$$

Төмендегі интегралды табыңдар:

$$1. \int \sqrt[3]{(2x-3)}dx$$

Шешуі: (1.3.1) формуласы бойынша:

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{(2x-3)}dx &= \left| \begin{array}{l} 2x-3 = t^3 \\ dx = \frac{3t^2 dt}{2} \\ t = (2x-3)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right| = \int t \cdot \frac{3t^2}{2} dt = \frac{3}{2} \int t^3 dt = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{3}{8} \cdot (2x-3)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{(2x-3)^4} + C \end{aligned}$$

Берілген есептегі интеграл таңбасының астындағы дәрежелік функция, яғни $(2x-3)^{\frac{1}{3}}$. Енді (1.3.2) формуласына назар аударсақ, мұнда $a = 2; b = -3$. Демек, бұл интегралды (1.3.2) формуласын қолданып, бірден есептеуге де болады, яғни

$$\int (2x-3)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{(2x-3)^4} + C.$$

$$2. \int \cos(x^2 + 1)xdx$$

$$\begin{aligned} \text{Шешуі: } \int \cos(x^2 + 1)xdx &= \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t, \quad d(x^2 + 1) = dt \\ 2xdx = dt, \quad xdx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \\ &= \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \\ dx = d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \mp \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \mp \arcsin t + C = \mp \arcsin \frac{1}{x} + C ;$$

1.3.3. Бөліктеп интегралдау әдісі

Айталық, $u=u(x)$, $v=v(x)$ үзіліссіз, дифференциалданатын функциялар болсын. Сонда

$$d(u \cdot v) = u dv + v du$$

бұдан

$$u dv = d(uv) - v du .$$

Осы теңдіктің екі жағын интегралдап, мынаны табамыз:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1.3.4)$$

(1.3.4) формуласын бөліктеп интегралдау формуласы дейді.

Интегралдарды табыңыздар:

$$1. \int x \ln x dx$$

Шешуі:

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ x dx = dv \\ \int x dx = \int dv \Rightarrow \frac{x^2}{2} = v \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x -$$

$$- \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$2. \int e^x \cos x \cdot dx$$

Шешуі:

$$\int e^x \cos x \cdot dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x \cdot dx =$$

$$= e^x \cdot \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$2 \int e^x \cos x \cdot dx = e^x (\sin x + \cos x) + C ,$$

Бұдан
$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$$

3. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \cdot dx$

Шешуі:
$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot dx = \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= \left. \begin{array}{l} x = u \Rightarrow dx = du \\ \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = dv \\ v = \sqrt{x^2 + a^2} \end{array} \right| = a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C. \quad (1.3.5)$$

1.3.4. Жай рационалдық функцияларды интегралдау

1. Егер бүтін рационалдық функция

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

берілсе, оны бірден интегралдауға болады, атап айтқанда:

$$\int f(x) dx = \int a_0 x^n dx + \dots + \int a_n dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \dots + a_n x + C;$$

2. Егер интеграл астындағы функция бұрыс бөлшек болса, онда алымын бөліміне бөліп, бүтін бөлігін бөліп шығару керек.

3. Егер $\frac{A}{x \pm a}$ бөлшегі берілсе, оның интегралы былай табылады:

$$\int \frac{A}{x \pm a} dx = A \cdot \int \frac{1}{x \pm a} dx = A \cdot \ln |x \pm a| + C. \quad (1.3.6)$$

4. Егер $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geq 0$) берілсе, x -тің $(-\infty, a)$ және $(a, +\infty)$

аралығындағы барлық мәндері үшін оның интегралы былай табылады:

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{A}{(1-k) \cdot (x-a)^{k-1}} + C.$$

$$1. \int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}$$

Шешуі: Интеграл астындағы функция былай жіктеледі.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

Мұндағы A, B_1, B_2 анықталмаған белгісіз коэффициенттер. Оларды табу үшін теңбе - теңдіктің екі жағын ортақ бөлімнен босатып жібереміз де, екі жақта тұрған көпмүшелердегі x -тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін бір - біріне теңестіріп, белгісіз коэффициенттер бойынша теңдеулер жүйесін аламыз. Одан табылған коэффициенттерді орнына қойып, интегралды табамыз.

$$x \equiv A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1)$$

$$x \equiv (A + B_1) \cdot x^2 + (2A + B_2) \cdot x + (A - B_1 - B_2)$$

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ 2A + B_2 = 1 \\ A - B_1 - B_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Сонымен } A = \frac{1}{4}, B_1 = -\frac{1}{4}, B_2 = \frac{1}{2}.$$

Осы белгісіз коэффициенттерді табудың 2-әдісі де бар. Ол үшін ыңғайына байланысты x -ке мәндер береді, яғни $x=1$ болса, онда $1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$, ал $x=-1$ болса, онда

$$-1 = -2B_2 \rightarrow B_2 = \frac{1}{2}. \quad \text{Ал } x=0 \text{ болса, онда}$$

$$A - B_1 - B_2 = 0 \text{ бұдан } B_1 = A - B_2 = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Демек, } \int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2(x+1)} + C$$

1.3.5. Квадрат үшмүшелігі бар кейбір интегралдар

I. Мына
$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+C} dx$$

түрдегі интегралдарды есептеу үшін квадрат үшмүшелікті мынадай түрге келтіру керек:

$$ax^2+bx+C=a(x+k)^2+\ell \quad (1.3.7)$$

мұндағы k және ℓ тұрақты сандар.

(1.3.7) түріндегі түрлендіру жасау үшін квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп шығару әдісін қолдану керек.

Интегралдарды табыңыздар:

1.
$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

Шешуі: Интеграл астындағы үшмүшелікті $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ түрінде жазалық:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

2.
$$\int \frac{5x+8}{6x^2+x-2} dx$$

Шешуі:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+8}{6x^2+x-2} dx &= \int \frac{(5x+8)dx}{6\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)} = \int \frac{(5x+8)dx}{(2x-1)(3x+2)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{5x+8}{(2x-1)\cdot(3x+2)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{3x+2} \\ 5x+8 \equiv A(3x+2) + B(2x-1) \\ \begin{cases} 3A+2B=5 \\ 2A-B=8 \end{cases} \Rightarrow A=3, B=-2 \end{array} \right| = \end{aligned}$$

Х-тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді теңестірдік

$$\begin{aligned} &= 3 \int \frac{dx}{2x-1} - 2 \int \frac{dx}{3x+2} = \frac{3}{2} \int \frac{2dx}{2x-1} - \frac{2}{3} \int \frac{3}{3x+2} dx = \\ &= \frac{3}{2} \ln|2x-1| - \frac{2}{3} \ln|3x+2| + C. \end{aligned}$$

$$\text{II. } \int \frac{(Mx + N)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + C}}$$

түріндегі интегралдар, жоғарыдағы әдіс бойынша, 14-ші немесе 15-ші кестелік интегралға келтіріледі.

Интегралдарды табыңдар:

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}},$$

Шешуі:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x - 3}{5} + C, \end{aligned}$$

$$4. \int \frac{(x + 3)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Шешуі:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x + 3)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x + 2)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 + 1}} = \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2 \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + C. \end{aligned}$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{(mx + n)\sqrt{ax^2 + bx + C}}$$

түріндегі интегралдарға $\frac{1}{(mx + n)} = t$ алмастыруын жасау арқылы II түріндегі интегралдар алуға болады.

$$5. \int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{интегралды табыңдыздар:}$$

Шешуі:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 1}} &= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x + 1} = t \Rightarrow x + 1 = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{1 - 2t + 2t^2}} = - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + C.$$

IV. $\int \sqrt{ax^2 + bx + C} dx$

түріндегі интеграл үшмүшелікті түрлендіру, яғни толық квадрат бөліп алу әдісін пайдаланып, келесі формулалардың біреуіне келтіріледі:

$$1) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$2) \int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + C,$$

1.3.6. Кейбір иррационалдық функцияларды интегралдау

Интеграл $\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}} \right) dx$

түрінде берілген. Мұндағы $n \in \mathbb{N}$, символ R жақша ішіндегі шамаларға тек рационалдық амалдар ғана қолданылатынын бейнелейді.

Егер айнымалыға $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}} = t$

Ауыстыру жасағанда $\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = t^n$, $x = \frac{b_1t^n - b}{a - a_1t^n}$, $dx = \left(\frac{b_1t^n - b}{a - a_1t^n} \right) dt$

болар еді. Бұл жағдайда :

$$\int R \left(\frac{b_1t^n - b}{a - a_1t^n}, t \right) \cdot \left(\frac{b_1t^n - b}{a - a_1t^n} \right) dt \quad (1.3.8)$$

түрге ауысады, яғни айнымалы t -ның рационалдық функциясының интегралына келеді.

Төмендегі интегралды табыңыздар:

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{3x-1} - \sqrt[4]{3x-1}},$$

Шешуі: Иррационалдықтан құтылу үшін, $3x-1=t^4$ алмастыруын

жасаймыз. Сонда $dx = \frac{4t^3 dt}{3}$ болады.

$$\begin{aligned}
 \text{Демек, } \int \frac{dx}{\sqrt{3x-1} - \sqrt[4]{3x-1}} &= \frac{4}{3} \int \frac{t^3 dt}{t^2 - t} = \frac{4}{3} \int \frac{t^3 dt}{t(t-1)} = \frac{4}{3} \int \frac{t^2 dt}{t-1} = \\
 &= \frac{4}{3} \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt = \frac{4}{3} \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\
 &= \frac{4}{3} \int (t+1) d(t+1) + \frac{4}{3} \int \frac{1}{t-1} dt = \frac{4}{3} \frac{(t+1)^2}{2} + \\
 &+ \frac{4}{3} \ln|t-1| + C = \frac{2}{3} (\sqrt[4]{3x-1} + 1)^2 + \frac{4}{3} \ln|\sqrt[4]{3x-1} - 1| + C
 \end{aligned}$$

1.3.7. Тригонометриялық функцияларды интегралдау

I. $\int R(\sin x, \cos x) dx$

түріндегі интегралдар $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $(-\pi < x < \pi)$ әмбебап ауыстыруы арқылы мына түрге келеді:

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

Бұл интеграл аргумент t -нің рационалдық функциясының интегралы, ал оны интегралдау әдісі бізге белгілі.

1. Интегралды табыңыз: $\int \frac{dx}{\cos x}$

Шешуі:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\cos x} &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = \\
 &= 2 \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C
 \end{aligned}$$

2. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

$$\begin{aligned} \text{Шешуі: } \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x) + C. \end{aligned}$$

1.3.8. Анықталған интеграл

1⁰. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ аралығында үзіліссіз, ал $F(x)$ функциясы осы аралықта $f(x)$ функцияның кез-келген алғашқы функциясы ($F'(x) = f(x)$) болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1.3.8.)$$

формуласы Ньютон-Лейбниц формуласы деп атайды.

Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері :

$$1) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx ; \quad 2) \int_a^a f(x)dx = 0 ;$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ;$$

$$4) \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx ;$$

$$5) \int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx ; \quad \text{мұндағы } C\text{-тұрақты сан.}$$

6) Егер $m \leq f(x) \leq M$ теңсіздігі $[a, b]$ аралығында орындалса, онда

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

теңсіздігі арқылы анықталған интеграл бағаланады.

$$7) \text{ Егер } f(x) \text{ тақ функция болса, онда } \int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

8) Егер $f(x)$ жұп функция болса, онда $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

1. Интегралды табыңыз: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} dx$

Шешуі:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1 \end{aligned}$$

1.3.9. Анықталған интегралдағы айнымалыны ауыстыру

Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығында үзіліссіз, ал $x = \varphi(t)$ функциясы өзінің туындысымен бірге $[\alpha, \beta]$ аралығында үзіліссіз, сондай-ақ $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ мәндері табылып, $f(\varphi(t))$ функциясы $[\alpha, \beta]$ аралығында үзіліссіз болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \quad (1.3.9)$$

Бұл формуланы анықталған интегралдағы айнымалыны ауыстыру формуласы деп атайды.

1. Интегралды табыңыздар: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

Шешуі: Айталық, $x = a \sin t$ болсын, онда

$$dx = a \cos t dt, \quad t = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\begin{aligned} a = a \sin t &\Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 = a \sin t &\Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{aligned}$$

Сондықтан: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cdot \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
 &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \left(\frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sin 2t}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi}{4}
 \end{aligned}$$

1.3.10. Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау әдісі

Егер $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары $[a, b]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болса, онда

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (1.3.10)$$

формуланы анықталған интегралдағы бөліктеп интегралдау формуласы деп атайды.

Мұндағы $uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

1. Интегралды табыңыздар: $\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx$

$$\begin{aligned}
 \text{Шешуі: } \int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u \\ du = \frac{1 \cdot dx}{1 + x^2} \\ x dx = dv \\ \frac{x^2}{2} = v \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{dx}{1 + x^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2};
 \end{aligned}$$

1.3.11. Меншіксіз интегралдар

1⁰. Шектері шексіздік болып келген интегралды меншіксіз интеграл дейді.

Егер $y = f(x)$ функциясы $[\alpha, \infty)$ аралықта үзіліссіз болса, онда

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$$

интегралын меншіксіз интеграл деп атайды да оны былай есептейді:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^A f(x) dx \quad (1.3.11.)$$

Егер (1.3.11.) интегралының мәні ақырлы сан болса, онда меншіксіз интеграл жинақты, ал оның мәні шексіздікке айналса, онда меншіксіз интегралды жинақсыз дейді.

Мына $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ интегралдарды да меншіксіз интегралдар деп атайды.

Сонымен,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx$$

меншіксіз интегралдары да жоғарыдағы сияқты анықталады.

Егер $|f(x)| \leq \varphi(x)$ болса және $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ жинақты болса, онда (1.3.11)

интегралы да жинақты болады.

Егер $f(x) \geq 0$ және $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) \cdot x^m\} = A \neq \infty, A \neq 0$ орындалса, онда

$x \rightarrow \infty$ жағдайда $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$

Демек :

1. $m > 1$, болса интеграл (1.3.11) жинақты ,
2. $m \leq 1$, болса интеграл (1.3.11) жинақсыз.

1. Мына интегралды есептеңіз:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Шешуі:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} (\arctg x) \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\arctg A - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Демек $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ жинақты.

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

Шешуі: $x \rightarrow \infty$ болғанда $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ интегралы жинақты, онда берілген интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ да жинақы.

2⁰. Шектелмеген функцияның интегралы

Егер $y = f(x)$ функциясы $x = c$ нүктесінде үзілісті болса ($x = c \in [a, b]$), және осы аралықта жататын қалған барлық нүктелерде функция үзіліссіз болса, онда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx \quad (1.3.12.)$$

теңдігі орындалады.

Мұндағы ε_1 мен ε_2 бір-бірінен тәуелсіз өзгереді.

$$3. \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

Шешуі: $x = 0$ болғанда интеграл астындағы $\frac{1}{x}$ функциясының шексіз

үзілісі бар. (1.3.11) анықтамасы бойынша:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = -\ln 0 = \infty$$

яғни меншіксіз интеграл жинақсыз.

Сонымен, интегралдау шектері шексіздікке тең немесе үзіліс функциялардың интегралдары меншіксіз интегралдар деп аталады.

1.3.12. Анықталған интегралды жуықтап есептеу

1⁰. Трапеция тәсілі

Егер $[a, b]$ аралығын өзара тең n бөлікке мына

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

нүктелер арқылы бөлсек, онда мына

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right] \quad (1.3.13)$$

формуланы трапеция формуласы деп атайды.

Бұл формула үшін

$$|\Delta| = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2},$$

мұндағы

$$M_2 = \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad (1.3.14)$$

Егер $[0, 1]$ аралығын тең 10 бөлікке бөлсек, онда (1.3.14) формуласы бойынша

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10} (0,99 + 0,96 + 0,92 + 0,86 + 0,80 + 0,74 + 0,67 + 0,61 + 0,55 + 0,50 + 0,25) = 0,76$$

Бұл интегралдың мәні Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 = \frac{3,14159...}{4} = 0,78539... .$$

(1.3.14) формуламен берілген анықталған интегралды жуықтап есептеу тәсілін трапециялар тәсілі деп атайды.

1. Мына: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ интегралды трапеция тәсілі арқылы жуықтап

есептеңдер:

Шешуі: (1.3.14) формуладағы $n = 5$ болсын. Онда

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2 \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, 5,$$

$$x_0 = 0, x_1 = 0,2, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,8, x_5 = 1$$

Демек

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} (1,0000 + 0,5000) + 0,8333 + 0,7143 + \right. \\ \left. + 0,6250 + 0,5556 \right) = 0,2 \cdot 3,4782 \approx 0,69564$$

$$f''(x) = \left(\left(\frac{1}{1+x} \right)' \right)' = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Бұл функция $[0, 1]$ аралығында монотонды кемиді, $x=0$ нүктесінде өзінің максимумына жетеді.

Демек

$$M_2 = f''(0) = 2,$$

$$\Delta \leq \frac{2}{12 \cdot 5^2} = \frac{1}{150} < 0,007$$

Ал, Ньютон-Лейбниц формуласын қолдансақ: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0,69315$

1.3.13. Жазық фигураның ауданы

1⁰. Жоғары жағынан үзіліссіз және теріс емес $f(x)$ функциясы графигімен, екі бүйір жағынан $x=a$, $x=b$ түзулерімен, төменгі жағынан OX өсінің a мен b нүктелері арасындағы кесіндісімен шектелген жазық фигура қисық сызықты трапеция деп аталып, оның ауданын мына формуламен табамыз.

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1.3.15)$$

2⁰. Егер $f(x) < 0$ болса, онда:

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

3⁰. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде оң да, теріс те мәндер қабылдаса, онда функцияның графигі $[a, b]$ кесіндісінің ең болмағанда бір C нүктесін қиып өтеді де, мына формула орындалады.

$$S = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

4⁰. Төменгі жағынан $y = f_1(x)$, ал жоғары жағынан $y = f_2(x)$ үзіліссіз функциялардың графиктерімен $(f_1(x) \leq f_2(x))$ және $x=a$, $x=b$ тік түзулерінің $(a \leq x \leq b)$ кесіндісімен шектелген фигураның ауданы

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

формуласы бойынша анықталады.

1. $y = 2 - x^2$ параболасы мен $y = x$ түзуімен шектелген ауданды табыңыз.

Шешуі: Парабола мен $y=x$ түзуінің қиылысу нүктесін $\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$

жүйені шешу арқылы табамыз. Сонда $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ интегралдау шектері табылады. Демек, іздеген аудан былай анықталады.

$$S = \int_{-2}^1 ((2 - x^2) - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2};$$

1.3.14. Айналу денесінің көлемі

Үзіліссіз, теріс емес $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ функциясына сәйкес келетін қисық сызықты трапецияны абсциссалар осі арқылы айналдырғанда, пайда болған айналу денесінің көлемі мына формула арқылы табылады:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

1. $y^2 = 9(x + 3)$ және $x - y + 3 = 0$.

Шешуі: Интегралдау шектерін табу үшін жүйе шешеміз:

$$\begin{cases} y^2 = 9(x + 3), \\ x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

Парабола мен түзудің қиылысу нүктелері: $A(-3, 0)$ және $B(6, 9)$. Интегралдау шектері $a = -3$ және $b = 6$. Изделінді дененің көлемі $y^2 = 9(x + 3)$ (V_1) қисығынан пайда болған параболоидтың көлемі мен $x - y + 3 = 0$ (V_2) түзуден пайда болған конус көлемінің айырмасына тең:

$$V_1 = \pi \int_{-3}^6 9(x + 3) dx = 9\pi \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-3}^6 = 364,5\pi$$

$$V_2 = \pi \int_{-3}^6 (x+3)^2 dx = \pi \cdot \frac{(x+3)^3}{3} \Big|_{-3}^6 = \pi \cdot \left(\frac{9^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \pi \cdot \frac{729}{3} = 243\pi ;$$

$$V = V_1 - V_2 = 364,5\pi - 243\pi = 121,5\pi$$

II ТАРАУ КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯЛАР

2.1. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕРІ

2.1.1. Анықталу облысы. Деңгей сызықтары

Айталық $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n өлшемді кеңістіктің кез келген нүктесі болсын.

Анықтама. Көп айнымалылы функцияның нақты мені болатындай нүктелер жиынтығы көп айнымалылы функцияның анықтау облысы деп аталады.

Екі айнымалылы функция былай жазылады

$$Z = f(x, y)$$

Екі айнымалылы функцияның анықталу облысы бірнеше сызықтармен шектелген координаталық жазықтың белгілі бір бөлігі болады, немесе координаталық жазықтықтың өзі болады. Ал үш айнымалы функцияның анықталу облысы кеңістіктің бір бөлігі немесе бүкіл кеңістіктің өзі болады.

Экономикада жиі қолданылатын әр түрлі шығын, пайда және түсім функциялары көп айнымалы функциялар мысалдарына жатады. Белгілі Кобба-Дуглас өндірістік функциясы былай беріледі:

$$Z = ax_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Мұнда $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ болады.

1. $Z = ax + Bx + C$ функциясының анықтау облысын тап.

Шешуі: Бұл функция x пен y -тің кез келген мәндерінде анықталған. Сондықтан бұл функцияның анықталу облысы бүкіл координаталық жазықтық болады.

2. $Z^2 + x^2 + y^2 = 4$ функциясының анықталу облысын тап.

Шешуі: Әуелі Z арқылы шешелік $Z = \pm \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Түбір астындағы өрнектің теріс болмайтындығын ескеріп, $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ немесе $x^2 + y^2 \leq 4$ теңсіздіктерін аламыз. Осындағы соңғы теңсіздікті радиусы $R=2$ болатын орталығы координаталар системасының бас нүктесінде орналасқан дөңгелектің ішінде және шекарасында жатқан барлық нүктелердің координаталары қанағаттандырады. Сонымен бұл функцияның анықталу облысы радиусы $R=2$ дөңгелек болады.

3. $Z = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right) + \arcsin(1 - y)$ функциясының анықталу облысын тап.

Шешуі: $\arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right)$ функциясының анықталу облысы $y \neq 0$ және

$$-1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1 \quad \text{шарттары бойынша анықталады, ал, } \arcsin(-y)$$

функциясының анықталу облысы $-1 \leq 1 - y \leq 1$ шарты бойынша анықталады. Сондықтан берілген функцияның анықталу облысы мына шарттарды қанағаттандыруы қажет:

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ -1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1 \\ -1 \leq 1 - y \leq 1 \end{cases}$$

Осы теңсіздіктер жүйесін шешіп, берілген функцияның анықталу облысы $y^2 = -x$, $y^2 = x$ парабодаларымен және $y = 2$, $y = 0$ түзулерімен шектелген ($x = 0$, $y = 0$ нүктесі кірмейді) жазықтықтағы облыс екенін табамыз.

4. $Z = \sqrt{xy}$ функциясының анықталу облысын тап.

Шешуі: Бұл функция анықталуы үшін $xy \geq 0$ шарты орындалуы айқын. Осыдан екі жағдай туындайды: $x \geq 0$, $y \geq 0$ және $x \leq 0$, $y \leq 0$. Бұл екі шарттарға бірінші және үшінші ширектерде жатқан, сондай-ақ координаталық өстерде жатқан нүктелер жиынтығы қанағаттандырады.

6. $Z = x^2 + y^2$ функциясының деңгей сызықтарын тап.

Шешуі: $Z = C$ болғанда, $x^2 + y^2 = C$ теңдеуін аламыз. Мұнда $C > 0$ болғандықтан, бұл теңдеу концентрлік шеңберлер жиынтығын береді; яғни әрбір деңгей сызығы – шеңбер болады.

2.1.2. Екі айнымалылы функцияның дербес туындылары мен дифференциалы

Дербес өсімшелер

$$\Delta_x Z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad (2.1.1)$$

$$\Delta_y Z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (2.1.2)$$

Толық өсімше

$$\Delta Z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (2.1.3)$$

Дербес туындылар

$$Z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad (2.1.4)$$

$$Z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \quad (2.1.5)$$

Дербес дифференциалдар

$$d_x z = z'_x dx, \quad d_y z = z'_y dy \quad (2.1.6)$$

Толық дифференциал

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \quad (2.1.7)$$

Дифференциалдың көмегімен функцияның мәнін жуықтап есептеу

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz \quad (2.1.8)$$

Бір айнымалы бойынша дербес туынды алғанда, екінші айнымалы тұрақты шама ретінде қабылданады. Сондықтан бір айнымалы функцияны дифференциалдау ережелері мен формулалары көп айнымалы функцияның дербес туындыларын тапқанда пайдаланылады.

1. $Z = x \cdot y + 7$ функциясының дербес және толық өсімшелерін тап.

Шешуі: (2.1.4)-(2.1.5) формулаларын қолданамыз

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y + 7 - (x \cdot y + 7) = \Delta x \cdot y$$

$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) + 7 - (x \cdot y + 7) = \Delta y \cdot x$$

$$\Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) + 7 - (x \cdot y + 7) = \Delta x \cdot y + \Delta y \cdot x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Осы мысалдан, жалпы жағдайда толық өсімше дербес өсімшелердің қосындысына тең болмайтындығын көреміз, яғни $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

2. $Z = x \cdot y + 7$ функциясының дербес туындыларын анықтама бойынша тап.

Шешуі: (2.1.1) және (2.1.2) формулаларын қолданамыз:

$$Z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot y}{\Delta x} = y$$

$$Z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y \cdot x}{\Delta y} = x$$

3. Дифференциалды пайдаланып, $z = x^3 y^2$ функциясының $M(1,02; 0,97)$ нүктесіндегі мәнін жуықтап есепте.

Шешуі: Функцияның мәнін жуықтап есептеу үшін (2.1.8) формуласын қолданамыз. Мұндағы $x = 1, y = 1, \Delta x = 0,02, \Delta y = -0,03$.

Сонда $f(x; y) = f(1; 1) = 1, \quad Z'_x = 3x^2 y^2, \quad Z'_y = 2x^3 y$ және $Z'_x(1; 1) = 3, \quad Z'_y(1; 1) = 2$.

Сонымен

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1,02)^3 \cdot (0,97)^2 \approx 1 + 3 \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = 1$$

2.1.3. Күрделі функцияның туындысы

Егер $z = f(x, y)$ функциясы x және y айнымалылары бойынша дифференциалданатын болса, ал x және y сонымен қатар t айнымалысы арқылы дифференциалданатын болса және $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, онда күрделі $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ функцияның туындысы мына формуламен табылады

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.1.9)$$

Егер $z = f(x, y)$ және $y = \psi(x)$ болса, онда

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.1.10)$$

Бұл жағдайда $\frac{dz}{dx}$ толық туынды деп аталады.

$z = x^2 \cdot y$ функциясының $x = t^2 - 1$ және $y = \ln t$ болғанда, t айнымалысы бойынша туындысын тап.

Шешуі: (2.1.9) формуласын қолданайық, сонда

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot y \cdot 2t + x^2 \cdot \frac{1}{t} = 4(t^2 - 1) \cdot t \cdot \ln t + (t^2 - 1) \cdot \frac{1}{t}$$

2.1.4. Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар

Екінші ретті дербес туынды деп бірінші ретті дербес туындыдан алынған бірінші ретті туындыны айтады. Төмендегі белгілеулер қолданылады:

$$\begin{aligned} Z''_{xx} &= (Z'_x)' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \\ Z''_{yy} &= (Z'_y)' = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \\ Z''_{xy} &= (Z'_x)' = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \\ Z''_{yx} &= (Z'_y)' = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Екінші ретті дифференциал

$$d^2 z = Z''_{xx} \cdot dx^2 + 2Z''_{xy} dx dy + Z''_{yy} dy^2 \quad (2.1.12)$$

1. Мына функцияның екінші ретті дербес туындыларын тап:

$$Z = (x^3 + y^3)^2$$

Шешуі: Әуелі бірінші ретті дербес туындыларды табамыз

$$Z'_x = 6x^2(x^3 + y^3) = 6x^5 + 6x^2y^3$$

$$Z'_y = 6y^2(x^3 + y^3) = 6x^3y^2 + 6y^5$$

Енді екінші ретті дербес туындыларды табайық.

$$Z''_{xx} = (6x^5 + 6x^2y^3)'_x = 30x^4 + 12xy^3$$

$$Z''_{yy} = (6x^3y^2 + 6y^5)'_y = 12x^3y + 30y^4$$

$$Z''_{xy} = 18x^2y^2, \quad Z''_{yx} = 18x^2y^2$$

Екінші ретті дербес туындыларды тап: $Z = 3 + \ln y \cdot x$

Шешуі: $Z'_x = \frac{1}{x}, \quad Z''_{xx} = -\frac{1}{x^2}, \quad Z'_y = \frac{1}{y}, \quad Z''_{yy} = -\frac{1}{y^2}, \quad Z''_{xy} = 0$

2.1.5. Берілген бағыттағы туынды. Градиент

$Z = f(x, y)$ функциясының берілген $\vec{\ell}$ вектордың бағытындағы туынды осы функцияның $\vec{\ell}$ векторының бағыты бойынша өзгеру жылдамдығын

сипаттайды. Екі айнымалы функцияның $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ векторының бағыты бойынша туындысы мына формуламен есептеледі.

$$\frac{\partial Z}{\partial \ell} = Z'_x \cdot \cos\alpha + Z'_y \cdot \cos\beta \quad (2.1.13)$$

Мұндағы $\cos\alpha, \cos\beta$ бағыттаушы косинустар. Егер $\vec{\ell} = (x, y)$ болса, онда бағыттаушы косинустар былай анықталады:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.1.14)$$

$Z = x^2y^3$ функциясының $A(-2; 1)$ нүктесіндегі $\vec{\ell} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ векторының бағыты бойынша туындысын тап.

Шешуі: Әуелі (2.1.14) формуласы бойынша бағыттаушы косинустарды табамыз

$$\cos\alpha = \frac{-3}{5}, \quad \cos\beta = \frac{4}{5}$$

Содан кейін дербес туындылардың $A(-2; 1)$ нүктесіндегі мәндерін табамыз

$$Z'_x = 2xy^3, \quad Z'_x(-2; 1) = -4, \quad Z'_y = 3x^2y^2, \quad Z'_y(-2; 1) = 12$$

Сонда

$$\frac{dz}{d\ell} = -4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot 12 = 12.$$

2. $A(1;1)$ және $B(6;4)$ нүктелері берілген. $Z = \ln(x^2 + 4y^2)$ функциясының $A(1;1)$ нүктесіндегі $\overrightarrow{AB}$ векторының бағыты бойынша туындысын тап.

Шешуі: Әуелі $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын тауып, сосын бағыттаушы косинустарын табалық:

$$\vec{\ell} = \overrightarrow{AB} = (6-1; 4-1) = (5; 3), \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Енді дербес туындыларды тауып, олардың $A(1;1)$ нүктесіндегі мәндерін есептейміз

$$\frac{dz}{d\ell} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

Градиент. Координаталары $Z = f(x, y)$ функциясының дербес туындыларына тең болатын векторды градиент деп атайды. Градиент былай белгіленеді.

$$\text{grad} Z = (Z'_x, Z'_y) \quad (2.1.15)$$

немесе

$$\text{grad} Z = Z'_x \cdot \vec{i} + Z'_y \cdot \vec{j}$$

Егер $\vec{\ell} = (\cos \alpha; \cos \beta)$ бірлік вектор болса, онда

$$\vec{\ell} \cdot \text{grad} Z = Z'_x \cdot \cos \alpha + Z'_y \cdot \cos \beta$$

яғни

$$\vec{\ell} \cdot \text{grad} Z = \frac{dZ}{d\ell} \quad (2.1.16)$$

Сондай-ақ

$$\frac{dZ}{d\ell} = \vec{\ell} \cdot \text{grad} Z = |\text{grad} Z| \cdot \cos \varphi \quad (2.1.17)$$

Соңғы формуладан градиенттің қасиеттері айқындалады:

Егер $\vec{\ell} \uparrow \uparrow \text{grad} Z$ болса, онда $\vec{\ell}$ векторының бағыт-тындағы туынды ең үлкен мәнін қабылдайды.

Егер $\vec{\ell} \uparrow \downarrow \text{grad} Z$ болса, онда берілген функцияның $\vec{\ell}$ векторының бағыттындағы туынды ең кіші мәнін қабылдайды.

Егер $\vec{\ell} \perp \text{grad} Z$ болса, онда функцияның $\vec{\ell}$ векторының бағытындағы туындысы нөлге тең. Функцияның градиенті берілген нүктеде осы функцияның деңгеле перпендикуляр бағытталған болады.

3. $Z = x^3 + xy^2$ функциясының $A(-2; 3)$ нүктесіндегі градиентін тап.

Шешуі: Әуелі дербес туындыларды тауып, олардың $A(-2; 3)$ нүктесіндегі мәнін есептейміз.

$$Z'_x = 3x^2 + y^2, \quad Z'_x(-2; 3) = 21,$$

$$Z'_y = 2xy, \quad Z'_y(-2; 3) = -12$$

Сонда

$$\text{grad}Z(-2; 3) = (21; -12)$$

4. $Z = x^3 + 0,5y^2 - 3x$ функциясының $A(2; 5)$ нүктесінде градиентінің бағытындағы туындысын тап.

Шешуі: Әуелі $A(2; 5)$ нүктесінде дербес туындыларды табалық:

$$Z'_x(2; 5) = 9, \quad Z'_y(2; 5) = 5$$

Сонда $\text{grad}Z(2; 5) = (9; 5)$

Градиенттің бағыттаушы косинустары: $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{106}}, \quad \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{106}}$

Енді $\vec{\ell} = \text{grad}Z$ векторының бағытындағы туындыны табамыз

$$\frac{dZ}{d\ell} = 9 \cdot \frac{9}{\sqrt{106}} + 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{106}} = \sqrt{106}.$$

Сонда градиенттің бірінші қасиеті бойынша туындының осы табылған мәні оның $A(2; 5)$ нүктесіндегі ең үлкен мәні болып табылады.

2.1.6. Екі айнымалылы функцияның экстремумдары

Анықтама. Егер $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінің мейлінше аз аймағында

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y))$$

теңсіздігі орындалса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі $Z = f(x, y)$ функциясының локальді максимум (минимум) нүктесі деп аталады.

Функцияның максимумын немесе минимумын оның экстремумдары деп айтады. Функцияның экстремум мәні қабылданатын нүктені экстремум нүктесі деп атайды.

Экстремум болуының қажетті шарттары

Егер $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі экстремум нүктесі болса, онда бұл нүктеде дербес туындылар нөлге тең болады:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{және} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

немесе бұл туындылардың ең болмағанда біреуі жоқ болады.

Экстремум нүктелері әр уақытта сын нүктелер болып табылады. Ал сын нүктелері әр уақытта экстремум нүктелері бола бермейді.

Экстремум болуының жеткілікті шарттары:

Белгілеулер енгізелік:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2 \quad (2.1.18)$$

Айталық $Z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ сын нүктесінің мейлінше аз аймағында бірінші, екінші және үшінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар болсын. Сонда:

1. Егер $\Delta > 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ экстремум нүктесі болады және $A < 0$ ($C < 0$) болғанда, $M_0(x_0, y_0)$ максимум нүктесі болады, ал $A > 0$ ($C > 0$) болғанда $M_0(x_0, y_0)$ минимум нүктесі болады;

2. Егер $\Delta < 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде экстремум болмайды;

3. Егер $\Delta = 0$ болса, онда бұл нүктеде экстремум болуы да, болмауы да мүмкін. Бұл жағдайда бұл нүктеде экстремум барын не жоғын анықтау үшін, жоғары ретті дербес туындылар қарастырылады. Бұл тақырыптар бағдарламаға кірмегендіктен, біз қарастырмаймыз.

1. $Z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 434$ функциясының экстремумдарын зертте:

Шешуі: Әуелі сын нүктелерін табамыз. Ол үшін бірінші ретті дербес туындыларын тауып, оларды нөлге теңестіреміз:

$$\begin{cases} Z'_x = 0 \\ Z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 = 6y \\ \frac{x^4}{36} - 6x = 0 \end{cases}$$

Осыдан $M_1(0, 0)$ және $M_2(6, 6)$ екі сын нүктелерін табамыз.

Енді екінші ретті туындыларды тауып, олардың сын нүктелердегі мәндерін есептейміз

$$Z''_{xx}(0; 0) = 0, \quad Z''_{xy}(0; 0) = -36, \quad Z''_{yy}(0; 0) = 0$$

$$Z''_{xx}(6; 6) = 72, \quad Z''_{xy}(6; 6) = -36, \quad Z''_{yy}(6; 6) = 72$$

Сын нүктелерде экстремумның бар болуын жеткілікті шартты пайдаланып тексереміз:

$M(0, 0)$ нүктесінде $\Delta = -36 \cdot 36 < 0$, яғни бұл нүктеде экстремум жоқ.

$M(6, 6)$ нүктесінде $\Delta = 72 \cdot 72 - 36 \cdot 36 = 3888 > 0$.

Сондай-ақ, $A = Z''_{xx}(6; 6) > 0$. Сондықтан $Z_{\min} = Z(6; 6) = 2$.

1. Ескерту. Егер $\Delta > 0$ болса, онда $AC - B^2 > 0$, яғни $AC > 0$. Демек, A және C бірдей таңбалы болады. Осыдан функцияның экстремумы бар болса, онда A және C бірдей таңбалы болатындығы айқын болады.

2. Ескерту. Қарастырылған мысалда екі сын нүктенің біреуі экстремум нүктесі болмады. Демек, барлық сын нүктелер экстремум нүктелері бола бермейтіндігіне көз жеткіздік.

2.1.7. Шартты экстремумдар

Егер $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің мейлінше аз аймағында тәуелсіз айнымалылар X пен Y $\varphi(x, y) = 0$ байланыс теңдеуін қанағаттандырып және $f(M_0) > f(M)$ ($f(M_0) < f(M)$) теңсіздігі орындалса, онда екі айнымалылы $Z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде шартты максимумы (минимумы) бар дейді. Мұндағы

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (2.1.19)$$

байланыс теңдеуі деп аталады.

Шартты экстремумдарды табу үшін Лагранж функциясының жәй экстремумдарын тапса, жеткілікті:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \quad (2.1.20)$$

мұндағы, λ - Лагранж көбейткіші деп аталады.

Шартты экстремумдардың қажетті шарттары:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad (2.1.21)$$

Осы шарттардан x_0, y_0, λ_0 - табылады. Мұндағы $M_0(x_0, y_0)$ - сын нүкте, яғни бұл нүктеде шартты экстремум бар болуы мүмкін.

Шартты экстремумдардың жеткілікті шарттары:

Айталық $M_0(x_0, y_0), \lambda_0$ (2.1.21) жүйесінің бір шешімі болсын және

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} \quad (2.1.22)$$

Сонда, егер $\Delta < 0$ болса, онда $Z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде шартты максимумы болады, егер $\Delta > 0$ болса, нүктесінде шартты минимумы болады.

1. $Z = xy + 3$ функциясының $2x + 3y = 5$ болғанда, шартты экстремумын тап.

Шешуі: Лагранж теңдеуін жазалық

$$L(x, y, \lambda) = x \cdot y + 3 + \lambda(2x + 3y - 5)$$

Енді қажетті шартты жазамыз. Ол үшін дербес туындыларды тауып, (2.1.21) формуласын пайдаланамыз

$$L'_x = y + 2\lambda, \quad L'_y = x + 3\lambda, \quad L'_\lambda = 2x + 3y - 5$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{5}{4}, \quad y_0 = \frac{5}{6}, \quad \lambda_0 = -\frac{5}{12}$$

Сөйтіп $M_0\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ сын нүкте болады.

Енді

$$L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0), \quad L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0), \quad L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0),$$

$$\varphi'_x(x_0, y_0), \quad \varphi'_y(x_0, y_0)$$

есептеп, (2.1.22) өрнегіне қойып, есептейміз.

Сонда:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Сонымен, $\Delta = -12 < 0$, олай болса $M_0\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ нүктесінде шартты максимум болады.

$$Z_{\max} = Z\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right) = \frac{97}{24}.$$

Сондай-ақ, шартты экстремум болуының екінші жеткілікті шартын пайдалануға болады.

Егер $dx^2 + dy^2 \neq 0$ және $\varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0)dy = 0$ болса, онда $Z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінде

$$d^2 L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \quad (d^2 L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0)$$

болғанда шартты максимумы (минимумы) болады.

Жоғарыда қарастырылған мысалға осы екінші қажетті шартты қолданайық. Мұнда $x_0 = \frac{5}{4}$, $y_0 = \frac{5}{6}$, $\lambda_0 = -\frac{5}{12}$ және

$$L''_{xx}\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right) = 0, \quad L''_{xy}\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right) = 1, \quad L''_{yy}\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right) = 0$$

$$\varphi'_x\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{6}, \quad \varphi'_y\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{4}$$

Енді $\varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0)dy = 0$; $-\frac{5}{6} \cdot dx - \frac{5}{4} \cdot dy = 0$, $dx = -\frac{3}{2} dy$

Олай болса

$$d^2L = 0 \cdot dx^2 + 2 \cdot dx \cdot dy + 0 \cdot dy^2 = 2 \cdot dx \cdot dy = -3dy^2 < 0$$

Сөйтіп $d^2L < 0$, демек $M_0\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ нүктесінде шартты максимум болады.

2.2. ЕСЕЛІК ИНТЕГРАЛДАР

2.2.1. Екі еселі интеграл

хОу жазықтығында шектелген тұйық D облысында анықталған $f(x, y)$ функциясы берілсін.

D облысын аудандары $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ және диаметрлері $d_1, d_2, \dots, d_n$ болатын қарапайым n облысқа бөлеміз. Әрбір қарапайым облыстан кез-келген $M_i(x_i, y_i)$ нүктесін алып, функцияның M_i нүктедегі мәнін осы облыстың ауданына көбейтеміз.

$f(x, y)$ функциясы үшін D облысы бойынша **интегралдық қосындысы** деп

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = f(x_1, y_1) \Delta S_1 + f(x_2, y_2) \Delta S_2 + \dots + f(x_n, y_n) \Delta S_n \quad (2.2.1)$$

түріндегі қосындыны айтады.

Қарапайым облыстардың диаметрлерінің ең үлкені нөлге ұмтылғандағы (2.2.1) интегралдық қосындысының шегі D облысы бойынша $f(x, y)$ функциясынан алынған **екі еселі интеграл** деп аталады:

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (2.2.2)$$

Теорема. Егер $f(x, y)$ функциясы тұйық D облысында үзіліссіз болса, онда (2.2.1) интегралдық қосындының шегі табылады және D облысын қарапайым облыстарға бөлуге және $M_i(x_i, y_i)$ нүктесін тандап алуға тәуелсіз болады.

Егер D облысында $f(x, y) > 0$ болса, онда екі еселі интеграл $\iint_D f(x, y) dS$

жоғарғы жағынан $z = f(x, y)$ бетімен, төменгі жағынан ХОУ жазықтығындағы D облысымен, бүйір жағынан жасаушылары Oz осіне параллель болатын цилиндрлік бетпен шектелген цилиндрлік дененің көлеміне тең.

Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттері:

$$1. \iint_D (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) dS = \iint_D f_1(x, y) dS \pm \iint_D f_2(x, y) dS.$$

$$2. \iint_D c \cdot f(x, y) dS = c \iint_D f(x, y) dS, \text{ мұндағы } c - \text{тұрақты.}$$

$$3. \text{ Егер } D \text{ облысы } D_1 \text{ және } D_2 \text{ екі облысқа бөлінсе, онда}$$

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_{D_1} f(x, y) dS + \iint_{D_2} f(x, y) dS.$$

$$4. \text{ Егер } D \text{ облысында } f(x, y) \geq 0 \text{ болса, онда } \iint_D f(x, y) dS \geq 0.$$

Екі еселі интеграл декарттық координаталармен $\iint_D f(x, y) dx dy$ түрінде жазылады.

2.2.2. Екі еселі интегралды есептеу

Интегралдау облысының негізгі екі түрін қарастырамыз.

1. Интегралдау облысы D сол және оң жағынан $x = a$ және $x = b$ ($a < b$) түзулерімен, ал төменнен және жоғарыдан әрқайсысы тік түзулермен тек бір ғана нүктеде қиылысатын үзіліссіз $y = \varphi_1(x)$ және $y = \varphi_2(x)$ [$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$] қисықтарымен шектелген. (1-ші сурет).

Осындай облыс үшін екі еселі интеграл төмендегі формуламен табылады:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (2.2.3)$$

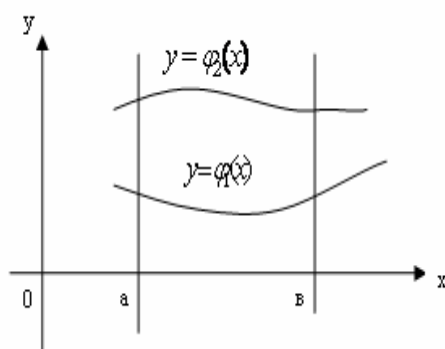
Сыртқы интеграл x , ал ішкі интеграл y бойынша алынады. Бірінші x тұрақты деп ішкі интегралды аламыз.

2. Интегралдау облысы D төменнен және жоғарыдан $y = c$ және $y = d$ ($c < d$) түзулерімен, ал сол және оң жағынан әрқайсысы көлденең түзулермен тек бір ғана нүктеде қиылысатын үзіліссіз $x = \psi_1(y)$ және $x = \psi_2(y)$ [$\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$] қисықтарымен шектелген. (2-ші сурет).

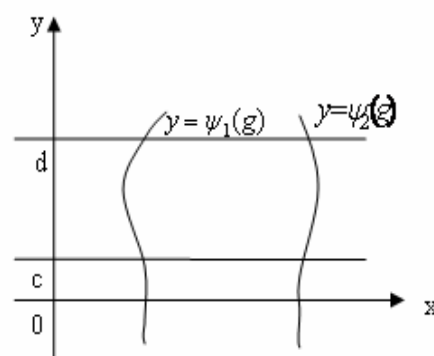
Осындай облыс үшін екі еселі интеграл төмендегі формуламен табылады:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (2.2.4)$$

Сыртқы интеграл y , ал ішкі интеграл x бойынша алынады. Бірінші y тұрақты деп ішкі интегралды есептейміз.



1-сурет



2-сурет

(2.2.3) және (2.2.4) интегралдардың оң жағы **қайталамалы интеграл** деп аталады.

Мысал 1. Интегралда интегралдау ретін өзгерту керек $\int_0^1 dx \int_x^{x^3} f(x, y) dy$.

Шешуі. Интеграл бойынша $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq x^3$. Сонда $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq \sqrt[3]{y}$.

$$\int_0^1 dx \int_x^{x^3} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$$

Мысал 2. Интегралды есептеу керек $\iint_D (x - 2y) dx dy$,

$D: 1 \leq x \leq 2$, $x \leq y \leq x^2$.

Шешуі: (2.2.3) формуласы бойынша

$$\begin{aligned} \iint_D (x - 2y) dx dy &= \int_1^2 dx \int_x^{x^2} (x - 2y) dy = \int_1^2 (xy - y^2) \Big|_x^{x^2} dx = \\ &= \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{15}{4} - \frac{7}{3} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

2.2.3. Екі еселі интегралда айнымалыларды алмастыру

1. Полярлық координаталардағы екі еселі интеграл.

Екі еселі интегралды тік бұрышты x, y координаталардан r, φ полярлық координаталарға түрлендіретін болсақ, онда $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ теңдіктері бойынша келесі формуланы аламыз:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Егер интегралдау облысы D полюстен шығатын екі $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) сәулелерімен және $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ бірімәнді функциялармен шектелген болса, онда екі еселі интеграл

$$\iint_D F(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r, \varphi) dr$$

мұндағы $F(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

2. Қисық сызықты координаталардағы екі еселі интеграл.

Тік бұрышты x, y координаталары қисықсызықты u, v координаталарымен $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ қатынастарымен байланысқан, мұндағы $x(u, v)$ және $y(u, v)$ функцияларының uOv жазықтығындағы D' облысында үзіліссіз дербес туындылары бар.

D' облысында түрлендіру якобианы нөлге тең емес:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Бұл жағдайдағы екі еселі интегралды түрлендіру формуласы:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

Мысал 3. $\iint_D y dx dy$ екі еселі интегралды есептеу керек. D – центрі $(3; 0)$

нүктесінде және радиусы 3-ке тең жарты дөңгелек.

Шешуі. Полярлық координаталар жүйесін полюсі координаталар бас нүктесімен, полярлық ось ox осінің оң бағытымен беттесіндей етіп

таңдаймыз. Сонда $r = 6 \cos \varphi$. Сонымен $0 \leq r \leq 6 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Полярлық координаталарға көшеміз:

$$\begin{aligned}\iint_D y dx dy &= \iint_D r \sin \varphi r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{6 \cos \varphi} r^2 dr = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \frac{r^3}{3} \Big|_0^{6 \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{72} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{1}{72} \frac{\cos^4 \varphi}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 18\end{aligned}$$

2.2.4. Екі еселі интегралдың қолданулары.

1. Жазық фигураның ауданы.

D облысымен шектелген жазық фигураның ауданы $S = \iint_D dx dy$ формуласымен табылады.

Егер D облысы полярлық координаталармен болса, онда

$$S = \iint_D r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr$$

2. Дененің көлемі. Жоғарғы жағынан үзіліссіз $z = f(x, y)$ бетімен, төменгі жағынан XOY жазықтығымен, бүйір жағынан xOy жазықтығынан, D облысын қиятын цилиндрлік бетпен шектелген цилиндрлік дененің көлемі:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

формуласымен табылады.

3. Бет ауданы. Егер тегіс бірімді бет $z = f(x, y)$ теңдеуімен берілсе, онда беттің ауданы

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

формуласымен табылады, мұндағы D-беттің xOy жазықтығындағы проекциясы.

4. Жазық фигураның массасы. xOy жазықтығында массасы M , тығыздығы $\rho(x, y)$ болатын D облысының массасын екі еселі интегралмен табуға болады:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

5. Жазық фигураның массаларының центрі. Тығыздығы $\rho(x, y)$, массасы M болатын болса, онда D облысының массаларының центрі :

$$x_c = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{M}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{M}.$$

Жазық фигура біртекті болса, онда

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{S},$$

мұндағы S – D облысының ауданы.

6. Жазық фигураның инерциясының моменттері. Тығыздығы үзіліссіз $\rho(x, y)$ функциясы болатын D облысының сәйкес Ox және Oy осьтеріне қатысты инерцияның моменті :

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Координатталар бас нүктесіне қатысты облыстың инерциясының моменті:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy.$$

2.2.5. Үш еселі интеграл

$f(x, y, z)$ - кеңістіктегі шектелген тұйық T облысында анықталған функция болсын.

T облысын көлемдері $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ және диаметрлері $d_1, d_2, \dots, d_n$ болатын қарапайым n облысқа бөлінсін. Әрбір қарапайым облыстан кез-келген $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктесін алып, функцияның M_i нүктедегі мәнін осы облыстың көлеміне көбейтеміз.

$f(x, y, z)$ функциясы үшін T облысы бойынша **интегралдық қосындысы** деп

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = f(x_1, y_1, z_1) \Delta V_1 + \\ + f(x_2, y_2, z_2) \Delta V_2 + \dots + f(x_n, y_n, z_n) \Delta V_n \quad (2.2.5)$$

түріндегі қосындыны айтады.

Қарапайым облыстардың диаметрлерінің ең үлкені нөлге ұмтылғандағы (2.2.5) интегралдық қосындысының шегі T облысы бойынша $f(x, y, z)$ функциясынан алынған **үш еселі интеграл** деп аталады:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \lim_{\max \Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad (2.2.6)$$

Теорема. Егер $f(x, y, z)$ функциясы тұйық T облысында үзіліссіз болса, онда (2.2.6) интегралдық қосындының шегі табылады және T облысын қарапайым облыстарға бөлуге және $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктесін таңдап алуға тәуелсіз болады.

Егер T облысында $f(x, y, z) > 0$ болса, онда үш еселі интеграл $\iiint_T f(x, y, z) dV$ - тығыздығы айнымалы $\gamma = f(x, y, z)$ функциясы болатын T денесінің массасы.

Декарттық координаталармен үш еселі интеграл

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$$

түрінде жазылады.

$f(x, y, z) = 1$ болса, онда дене массасы оның көлеміне тең:

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

Интегралдау облысы T төмендегідей түрде берілгенде, үш еселі интеграл кайталама интегралға келтіріледі:

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

мұндағы, $y_1(x), y_2(x), z_1(x, y), z_2(x, y)$ - үзіліссіз функциялар. Сонда

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Мысал 4. $\iiint_T 2y dx dy dz$ үш еселі интегралын есептеу керек.

Т денесі координаттық жазықтармен және $x+y+z=2$ жазықтығымен шектелген.

Шешуі. Берілген интегралды қайталамалы интегралға келтіреміз. Интегралдау шектері:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2-x, \quad 0 \leq z \leq 2-x-y.$$

$$\begin{aligned} \iiint_T 2y dx dy dz &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} 2y dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} 2yz \Big|_0^{2-x-y} dy \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} 2y(2-x-y) dy = 2 \int_0^2 dx \int_0^{2-x} ((2-x)y - y^2) dy \\ &= 2 \int_0^2 ((2-x) \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}) \Big|_0^{2-x} dx = 2 \int_0^2 (\frac{(2-x)^3}{2} - \frac{(2-x)^3}{3}) dx = 2 \int_0^2 \frac{(2-x)^3}{6} dx \\ &= -\frac{(2-x)^4}{12} \Big|_0^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2.2.6. Үш еселі интегралда айнымалыларды алмастыру.

Үш еселі интегралда x, y, z айнымалыларынан $x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$ қатынастарымен байланысқан жаңа u,v,w айнымалыларына көшетін болсақ, өзара бірімәнді үзіліссіз сәйкестік Охуз кеңістігінің T облысының нүктелері мен $Ouvw$ кеңістігінің T' облысы нүктелерінің арасында орнайды. $x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$ функциялары өздерінің бірінші ретті дербес туындыларымен бірге үзіліссіз. T' облысында якобиан J нөлге тең емес:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{T'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J| du dv dw \end{aligned}$$

1. Цилиндрлік координаталар. x, y, z декарттық координаталардан r, φ, z цилиндрлік координаталарға көшейік:

$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z \quad (0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty).$
(3-сурет).

Түрлендіру якобианы $J=r$ және үш еселі интегралды цилиндрлік координаталар арқылы түрлендіру формуласы:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot r dr d\varphi dz$$

2. Сфералық координаталар. x, y, z декарттық координаталардан r, φ, θ сфералық координаталарға көшейік:

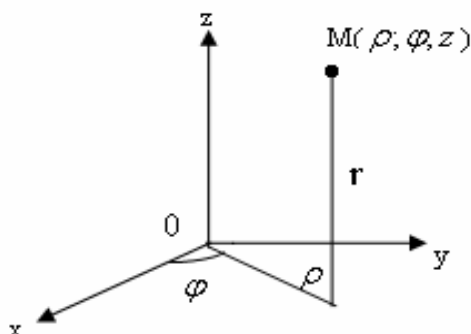
$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$$

$$(0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi)$$

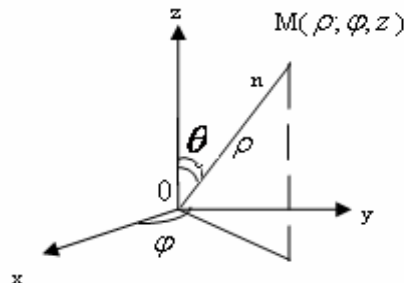
(4-сурет).

Түрлендіру якобианы $J=r^2 \sin \theta$ және үш еселі интегралды сфералық координаталар арқылы түрлендіру формуласы:

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_T f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$



3-сурет



4-сурет

2.2.7. Үш еселі интегралдың қолданулары.

1. Т денесінің көлемі $V = \iiint_T dx dy dz$ формуласымен анықталады.

2. Дене массасы. Егер дене тығыздығы айнымалы яғни $\gamma = \gamma(x, y, z)$ болса, онда дене массасы:

$$M = \iiint_T \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

3. Дененің ауырлық центрінің координаталары:

$$x_c = \frac{1}{M} \iiint_T \gamma x dx dy dz, \quad y_c = \frac{1}{M} \iiint_T \gamma y dx dy dz,$$

$$z_c = \frac{1}{M} \iiint_T \gamma z dx dy dz.$$

$\gamma = 1$ болса, онда

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_T x dx dy dz, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_T y dx dy dz, \quad z_c = \frac{1}{V} \iiint_T z dx dy dz.$$

4. Инерция моменттері. Тығыздығы үзіліссіз $\gamma = \gamma(x, y, z)$ функциясы болатын T денесінің сәйкес Ox және Oy, Oz осьтеріне қатысты инерция моменттері :

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad I_y = \iiint_T (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

Координаталар бас нүктесіне қатысты дененің инерциясының моменті:

$$I_0 = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Мысал 5. $z = x^2 + y^2$ параболоидымен және $z=1$ жазықтығымен шектелген біртекті дененің ауырлық центрінің координаталарын есептеңіз..

Шешуі. Дененің симметриялығына байланысты ауырлық центрі Oz осінде орналасқан.

Демек, $x_c = 0, y_c = 0$. Дене біртекті болғандықтан $z_c = \frac{1}{V} \iiint_T z dx dy dz$ формуласын қолданамыз.

Бірінші дене көлемін есептейік.. $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases}$ жүйесін шешкенде $x^2 + y^2 = 1$

теңдеуін аламыз.

Дененің xOy жазықтығындағы проекциясы радиусы 1-ге тең дөңгелек болады.

$$V = \iiint_T dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^1 dz = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy,$$

мұндағы, D облысы - $x^2 + y^2 = 1$ дөңгелегі. Соңғы интегралды есептеу үшін полярлық координаталарға көшеміз. D облысы $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ теңсіздіктерімен анықталады. Сонда

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r-r^3)dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Z_c үшін алымын есептейміз.

$$\begin{aligned} \iiint_T z dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^1 z dz = \iint_D \frac{z^2}{2} \Big|_{x^2+y^2}^1 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (1 - (x^2 + y^2)^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^4) r dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r - r^5) dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Сонымен, $Z_c = \frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}$. Берілген дененің ауырлық центрі $-C(0;0;\frac{2}{3})$ нүктесі.

ІІІ ТАРАУ. ҚАТАРЛАР. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР

3.1. ҚАТАРЛАР

3.1.1. Сандық қатарлар. Олардың жинақтылығы

Айталық,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (3.1.1)$$

сандық тізбек берілсін.

Анықтама:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (3.1.2)$$

өрнегін сандық қатар деп атайды. Мұндағы

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ қатардың мүшелері деп аталады, ал

a_n - жалпы мүшесі деп аталады.

Әдетте қатардың жалпы мүшесі өзінің нөмірінің функциясы болып табылады, яғни

$$a_n = f(n)$$

Мына қосындылар

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

дербес қосындылар деп аталады. Ал

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \quad (3.1.3)$$

дербес қосындылар тізбегі деп аталады.

Анықтама. Егер дербес қосындылар тізбегінің ақырлы шегі бар болса, онда сандық қатар жинақты деп аталады, яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (3.1.4)$$

Анықтама. Егер дербес қосындылар тізбегінің шегі жоқ болса, немесе шексіздікке ұмтылса, онда сандық қатар жинақсыз деп аталады.

Сандық қатардың жинақтылығын анықтау үшін, әуелі оның жалпы мүшесінің формуласын жазып, содан кейін n - ші дербес қосындысының формуласын жазады. Ақырында дербес қосындылар тізбегінің шегін табады.

1. Қатардың жинақтылығын зертте: $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

Шешуі: Әуелі жалпы мүшесінің формуласын жазалық: $a_n = \frac{1}{3^n}$

Енді n -ші дербес қосындысын жазамыз $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n}$

Соңғы қосындыға назар салсақ, бұл кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы екенін көреміз.

Мұнда $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$. Ал кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы мына формуламен анықталатындығы белгілі

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Олай болса, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$

анықтама бойынша, қарастырып отырған қатар жинақты, және оның қосындысы $S=1/2$.

2. Мүшелері натурал сандардан тұратын қатар қарастыралық:

$$1+2+3+\dots+n+\dots$$

Осы қатардың жинақтылығын зертте.

Шешуі: Әуелі жалпы мүшесін және n -ші дербес қосындысын жазалық

$$a_n = n, \quad S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Байқап отырғанымыздай, дербес қосынды арифметикалық прогрессия мүшелерінің қосындысы болады. Мұнда $a_1=1$, $d=1$ Олай болса

Енді осы қосындының шегін тапсақ, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \frac{n(n+1)}{2} = \infty$

яғни қатар жинақсыз.

3. Мына $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} + \dots$

қатардың жинақтылығын зертте.

Шешуі: Мұнда $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$, $S_n = \begin{cases} 0, \\ +\frac{1}{3}, \end{cases}$

Олай болса $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} 0, \\ +\frac{1}{3}, \end{cases}$

яғни нақты шегі жоқ. Қатар жинақсыз.

3.1.2. Жинақтылық белгілері

1. Жинақтылықтың қажетті шарты

Егер сандық қатар жинақты болса, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (3.1.5)$$

Жоғарыда қарастырылған қатарлар үшін қажетті шарттың орындалуын тексерелік:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{3} = \begin{cases} +\frac{1}{3}, & n \\ -\frac{1}{3}, & n \end{cases}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = 0$$

Бірінші және төртінші қатарлар үшін жинақтылықтың қажетті шарты орындалады, ал екінші және үшінші қатарлар үшін жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды. Жинақтылықтың қажетті шарты орындалмағанда, ол қатар жинақсыз деп бірден айтуға болады.

Жинақтылықтың жеткілікті шарттары:

Айталық, екі сандық қатарлар берілсін

$$a_1 + a_2 + \dots + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3.1.6)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (3.1.7)$$

1. Салыстыру белгісі. Айталық (3.1.6) және (3.1.7) сандық қатарлардың жалпы мүшелері мына теңсіздікті қанағаттандыратын болсын:

$$a_n \leq b_n \quad (3.1.8)$$

Сонда

1) Егер (3.1.7) қатар жинақты болса, онда (3.1.6) қатар да жинақты болады;

2) Егер (3.1.6) жинақсыз болса, онда (3.1.7) қатар да жинақсыз болады.

Бұл жинақтылық белгісін қолданғанда, өзара салыстырылатын қатарлардың біреуінің жинақтылығы немесе жинақсыздығы алдын-ала белгілі болуы керек.

5. Мына қатардың $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$ жинақтылығын зертте.

Шешуі: Бұл қатардың жалпы мүшесі $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Осы қатарды гармоникалық қатармен салыстыралық. Оның жалпы мүшесі белгілі $a_n = \frac{1}{n}$, және гармоникалық қатар жинақсыз. Осыдан $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, онда салыстыру белгісінің екінші тұжырымы бойынша қарастырылып отырған қатардың жинақсыз екенін көреміз.

6. Қатар берілген
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

Бұл қатардың дербес қосындылар тізбегінің шегі $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

екенін көрсетуге болады, яғни бұл қатар жинақты.

Енді мына қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ зерттейік.

Бұл қатар үшін $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ ал алдыңғы қатар үшін $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Енді екеуін салыстырайық:
$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

Олай болса, салыстыру белгісінің бірінші тұжырымы бойынша зерттеп отырған қатар жинақты.

Ескерту: Салыстыру белгісін қолданғанда екі қатарды салыстырғанда алғашқы мүшелерінен бастап салыстыру міндет емес.

2. Даламбер белгісі

Айталық (3.1.5) қатар үшін
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ болсын.}$$

Сонда:

1) егер $q < 1$ болса, қатар жинақты

2) егер $q > 1$ болса, қатар жинақсыз

3) $q = 1$ болғанда, қатардың жинақтылығы жөнінде бұл белгі жауап бере алмайды.

7. Қатардың жинақтылығын зертте
$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Шешуі: $a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

Даламбер белгісін қолданалық

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \quad q = 0,$$

олай болса қатар жинақты.

8. Қатардың жинақтылығын зертте
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$$

Шешуі: Мұнда $a_n = \frac{(n+1)!}{3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{3^{n+1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)}{3} = \infty$$

яғни, $q > 1$, олай болса, қатар жинақсыз.

9. Гармоникалық қатар берілген $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ жинақтылығын Даламбер белгісін қолданып зертте.

Шешуі: $a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$

яғни $q = 1$. Даламбер белгісі жинақтылығы жөнінде жауап бере алмайды. Алайда, біз бұрыннан білетініміздей, бұл қатар жинақсыз.

3. Кошидің интегралдық белгісі

Егер (3.1.6) қатарының мүшелері монотонды кемімелі және $f(x)$ функциясы үзіліссіз $f(n) = a_n$ болса, онда (3.1.6) қатары мен $\int_a^{\infty} f(x)dx, a \geq 1$, меншіксіз интегралы бір мезгілде жинақты болады немесе жинақсыз болады.

10. Қатардың жинақтылығын зертте $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Шешуі: Егер $s=1$ тең болса, гармоникалық қатар аламыз. Ол жинақсыз. Егер $s \neq 1$, онда бұл қатардың мүшелері монотонды кемімелі болады. Енді $f(x) = \frac{1}{x^s}$ функциясы $x \geq 1$ болғанда үзіліссіз. Олай болса, бұл қатардың жинақтылығын Кошидің интегралдық белгісін қолдану арқылы зерттейміз.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{x^{s-1}} \right|_1^R$$

Мұнда екі жағдай болуы мүмкін

1) $s > 1$, онда $\frac{1}{1-s} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R^{s-1}} - 1 \right) = \frac{1}{s-1}$

2) $s < 1$, онда $\frac{1}{1-s} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R^{s-1}} - 1 \right) = \infty$

Сөйтіп $s > 1$ болғанда, зерттеп отырған қатар жинақты, ал $s \leq 1$ болғанда, қатар жинақсыз болады.

Бұл $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ қатар жалпыланған гармоникалық қатар деп аталады.

3.1.3. Айнымалылы таңбалы қатарлар

Мүшелерінің таңбалары әр түрлі болып келетін қатарларды айнымалылы таңбалы қатарлар деп атайды.

Айталық,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (3.1.9)$$

айнымалылы таңбалы қатар болсын. Осы қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатарды жазалық:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots \quad (3.1.10)$$

Егер (3.1.10) қатар жинақты болса, онда (3.1.9) қатар абсолютті жинақты деп аталады.

Егер (3.1.10) қатар жинақты болса, онда (3.1.9) қатар да жинақты болады.

Жинақтылықтың Лейбниц белгісі

Егер кезек таңбалы қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған тізбек нөлге ұмтылатын монотонды, өспейтін тізбек болса, яғни

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots a_n \geq \dots \quad (3.1.11)$$

және

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad (3.1.12)$$

онда кезек таңбалы қатар

$$a_1 - a_2 + a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots \quad (3.1.13)$$

жинақты болады.

Салдар. Лейбниц белгісінің шарттарын қанағаттандыратын кезек таңбалы қатардың қалдығы

$$r_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + \dots)$$

мына

$$|r_n| < a_{n+1} \quad (3.1.14)$$

теңсіздігімен бағаланады.

1. Кезек таңбалы қатардың жинақтылығын зертте

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

Шешуі: Жинақтылығын Лейбниц белгісін қолданып зерттейміз. Ол үшін осы белгінің екі шарттарының орындалуын тексереміз

$$1) a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \text{және} \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Екі шарт та орындалады. Қатар жинақты.

2. Қатардың абсолютті жинақтылығын зертте

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$$

Шешуі: Лейбниц белгісінің шарттарын тексерелік:

$$1. a_n = \frac{1}{3n-1}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3n+2}, \quad \frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n+2}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-1} = 0$$

Екі шарт та орындалады. Қатар жинақты.

Енді қатардың мүшелерінің модульдерінен құралған қатарды қарастыралық

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$

Бұл қатар жинақсыз (салыстыру белгісін немесе интегралдық белгіні пайдаланып, жинақсыз екенін көрсетуге болады).

Сондықтан берілген кезек таңбалы қатар шартты жинақты болады.

3.1.4. Функциялық қатарлар

Айталық

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (3.1.15)$$

функциялар тізбегі берілсін.

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

өрнегін функциялық қатар деп атайды.

Функциялық қатардың жеке түрі

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \quad (3.1.16)$$

дәрежелік қатар деп аталады. Мұнда a_n - тұрақты сандар.

Сондай-ақ $x_0 = 0$ болғанда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (3.1.17)$$

Дәрежелік қатардың жинақтылық интервалының радиусы былай анықталады:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (3.1.18)$$

немесе

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \quad (3.1.19)$$

1. Дәрежелік қатардың жинақтылық облысын тап

$$\frac{x-3}{4} - \frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(x-3)^3}{4^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{4^n} + \dots$$

Шешуі: Әуелі жинақтылық интервалының радиусын табамыз. Мұнда

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}},$$

Сонда
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4.$$

Сонымен, $R=4$, олай болса жинақтылық интервалы $x_0 - R < x < R + x_0$, немесе $-4+3 < x < 4+3$; $-1 < x < 7$.

Енді қатардың жинақтылығын жинақтылық интервалының шеткі нүктелерінде зерттейміз:

1. $x = -1$, сонда
$$u_n = (-1)^n \frac{(-1-3)^n}{4^n} = (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \frac{4^n}{4^n} = 1$$

Жалпы мүшесі тұрақты сан. Сондықтан қатар жинақсыз.

2. $x = 7$, сонда
$$u_n = (-1)^n \frac{(7-3)^n}{4^n} = (-1)^n \frac{4^n}{4^n} = (-1)^n$$

бұл қатар кезек таңбалы қатар, сондықтан Лейбниц белгісін пайдаланып, оның жинақсыз екенін көрсетуге болады. Сөйтіп, жинақтылық интервалының шеткі нүктелерінде қатар жинақсыз болды. Демек, анықталу облысы $(-1; 7)$ интервалы болады.

2. Қатардың жинақтылық облысын тап
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n x^n$$

Шешуі: Мұнда
$$a_n = \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n$$

жинақтылық радиусын (3.1.19) формуласы бойынша табамыз

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3$$

Жинақтылық интервалы $(-3; 3)$ болады. Осы интервалдың шеткі нүктелерінде берілен қатардың жинақтылығын тексерелік:

1) $x = -3$. Сонда,
$$u_n = \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n \cdot (-3)^n = (-1)^n \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n$$

бұл кезек таңбалы қатар. Оның жинақтылығын анықтау үшін, Лейбниц белгісінің шарттарын тексеру қажет:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right)^n = e^{-\frac{1}{3}} \neq 0,$$

яғни белгінің екінші шарты орындалмайды. Олай болса, қатар жинақсыз.

$$2) x = 3. \text{ Сонда, } u_n = \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n,$$

бұл қатар үшін жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды. Сондықтан ол жинақсыз. Сонымен анықталу облысы $(-3; 3)$ интервалы болады.

Егер дәрежелік қатарда x -тің тек жұп немесе тақ дәрежесі болса, бұл қатардың жинақтылық радиусы Даламбер белгісін немесе Коши белгісін тікелей қолдану арқылы табылады:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

немесе

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)|} = |x-x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$3. \text{ Қатардың жинақтылық облысын тап } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{n \cdot 9^n} \right)^{2n}$$

Шешуі: Бұл қатарда x тек жұп дәрежелі. Сондықтан Даламбер белгісін пайдаланайық:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{2n+2}}{(n+1) \cdot 9^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 9^n}{(x-1)^{2n}} \right| = \\ &= \frac{(x-1)^2}{9} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{(x-1)^2}{9} < 1 \end{aligned}$$

Сонымен, $(x-1)^2 < 9$, $-3 < x-1 < 3$, $-2 < x < 4$.

Енді берілген қатардың жинақтылық интервалының шеткі нүктелеріндегі жинақтылығын зерттейік.

$$1) x = -2. \text{ Сонда } u_n = \frac{(-2-1)^{2n}}{n \cdot 9^n} = \frac{9^n}{n \cdot 9^n} = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{1}{n}$$

Жалпы мүшесі осы формуламен берілген қатар жинақсыз (гармоникалық қатар).

$$2) x = 4. \text{ Сонда}$$

$$3) u_n = \frac{(4-1)^{2n}}{n \cdot 9^n} = \frac{9^n}{n \cdot 9^n} = \frac{1}{n},$$

яғни $x = 4$ нүктесінде де қатар жинақсыз. Сөйтіп, анықталу облысы $(-2; 4)$ интервалы болады.

3.1.5. Функцияларды Тейлор және Маклорен қатарларына жіктеу

Егер $f(x)$ функциясын

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (3.1.20)$$

түрінде жазуға болатын болса, онда $f(x)$ функциясы Тейлор қатарына жіктеледі.

Егер $x_0 = 0$ болса, онда

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (3.1.21)$$

Бұл жағдайда $f(x)$ функциясы Маклорен қатарына жіктеледі.

Функцияны Тейлор (Маклорен) қатарына жіктеу екі кезеңнен тұрады:

1. Егер $f(x)$ шексіз дифференциалданатын болса, онда $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0), \dots$ есептеліп, сосын $f(x)$ үшін Тейлор қатары жазылады.

2. Алынған Тейлор қатарының анықталу облысы табылады.

Сондай-ақ, функцияны Тейлор қатарына жіктегенде, көп жағдайда төмендегі теорема қолданылады.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы шексіз дифференциалданатын болса және белгілі бір C саны табылып мына шарт

$$|f^{(n)}(x)| < C \quad (3.1.22)$$

орындалса, онда $f(x)$ Тейлор қатарына жіктеледі.

Кейбір функциялардың Маклорен қатарына жіктелуі:

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.1.23)$$

$$2. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.1.24)$$

$$3. \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.1.25)$$

$$4. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (3.1.26)$$

егер $m > 0$, онда $-1 \leq x \leq 1$

$-1 < m < 0$, онда $-1 < x \leq 1$

$m \leq -1$, онда $-1 < x < 1$

$$5. \arctg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.1.27)$$

$$6. \quad 1+x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1 \quad (3.1.28)$$

Мысалы, (3.1.23) жіктеуін пайдалансақ :

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!} + \dots \quad (3.1.29)$$

3.1.6. Функция мәндерін жуықтап есептеу

Айталық, $f(x)$ функциясы Маклорен қатарына жіктелген болсын. Онда бұл функцияның $x = 0$ нүктесінің аймағындағы дәл мәнін Маклорен қатарының көмегімен, ал жуық мәнін Маклорен қатарының дербес қосындысының көмегімен есептеуге болады. Жуықтап есептегенде жіберілген қатені бағалау, әдетте, қатардың қалдығын бағалау арқылы жүргізіледі.

Егер Маклорен қатары кезек таңбалы қатар болса, онда жіберілген қатені бағалау Лейбниц теоремасының көмегімен жүргізіледі, ал алынған қатар оң таңбалы қатар болса, онда қалдық қатарды салыстыру үшін басқа бір қатар алынады, әдетте кемімелі геометриялық прогрессия алынады.

1. Айталық e^x функциясының мәнін жуықтап есептеу керек болсын.

Маклорен қатарын пайдаланып, жуықтап

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

жазуға болады. Енді осы жуықтап есептегенде жіберілген қатені бағалау керек.

Шешуі: Қалдық қатарды жазалық

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \dots = \\ &= \frac{x^n}{n!} \cdot \left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \\ &< \frac{x^n}{n!} \cdot \left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \dots + \frac{x^m}{(n+1)^m} + \dots \right] \end{aligned}$$

Сөйтіп

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \dots \right] \quad (3.1.30)$$

теңсіздігін алдық. Мұнда оң жақтағы квадрат жақшаның ішінде кемімелі геометриялық прогрессия тұр. Оның қосындысы

$$S = \frac{\frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}} = \frac{x}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+1-x} = \frac{x}{n+1-x}$$

Ақырында

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x} \quad (3.1.31)$$

2. Маклорен қатарының дербес қосындысын (5.6.1) пайдаланып, $\sqrt[3]{e}$ өрнегін 0,002 дәлдікпен жуықтап есепте.

Шешуі: Дәлдікті (3.1.31) теңсіздігінде n -ді өзгерте отырып анықтаймыз, яғни $R_n(x) < 0,001$ орындалуы керек.

Айталық $n = 3$ болсын, сонда

$$R_3 < \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3!} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{4 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{1782} < 0,0006$$

Олай болса $n = 3$ деп алып, (5.6.1) формуласын қолданып,

$$\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3^3} \approx 1,3951,$$

яғни $\sqrt[3]{e} \approx 1,3951$ есептегенде, жіберілген қате 0,001-ден артық болмайды.

3. Маклорен қатарының дербес қосындысын пайдаланып $\sqrt[3]{30}$ санын 0,0001 дәлдікпен жуықтап есепте.

Шешуі: Әдетте $\sqrt[n]{B}$ санын есептегенде, B санын мына $B = a^n + c$ түрінде өрнектеп алады. Мұнда $\left| \frac{c}{a^n} \right| < 1$ болуы керек.

Сонда
$$\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{a^n + c} = a \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{c}{a^n}} = a \left(1 + \frac{c}{a^n} \right)$$

Осыдан кейін (3.1.26) жіктеуін пайдаланамыз. Мұнда

$$m = \frac{1}{n}, \quad x = \frac{c}{a^n}$$

Сөйтіп
$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{3^3 + 3} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{9}} = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ яғни } m = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{9}.$$

Енді (3.1.26) формуласын пайдаланып,

$$\sqrt[3]{30} = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{2!} \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{3!} \cdot \frac{1}{9^3} + \dots \right).$$

кезек таңбалы қатар алдық. Онда көрсетілген дәлдікті орындау үшін Лейбниц теоремасын қолданамыз.

$$R_n < |a_{n+1}|$$

Айталық, $n = 2$ болсын

$$R_2 < |a_3|, \quad R_2 < \left| \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{3!} \cdot \frac{1}{9^3} \right| = \frac{10}{118098} = 0,00008.$$

Сонымен $n = 2$ деп алсақ $R_2 < 0,00008$ болады, яғни көрсетілген дәлдік орындалады.

$$\text{Сөйтіп, } \sqrt[3]{30} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{2! \cdot 9^2} \right) \approx 3,1071.$$

$$4. \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ интегралын } 0,001 \text{ дәлдікпен есепте.}$$

Шешуі: Анықталмаған интегралды қарастырғанда $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

алынбайтын интеграл деп айтылған болатын. Сондықтан бұл интегралды жуықтап есептеуге тура келеді. Ол үшін (3.1.29)

жіктеуінде $(-x^2)$ -тың орнына $\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ -ні қоялық:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3!} + \dots$$

Кезек таңбалы қатар алдық. Енді дәрежелік қатарды мүшелеп, интегралдауға болатынын ескеріп:

$$\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \dots$$

аламыз. Олай болса

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \dots$$

Алынған кезек таңбалы қатар Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан көрсетілген дәлдікті орындау үшін сәйкес n - ді табу керек. Айталық $n = 3$ болсын:

$$R_3 < \frac{1}{9 \cdot 2^4 \cdot 4!} = \frac{1}{9 \cdot 16 \cdot 24} = 0,0002.$$

Олай болса $n = 3$ болғанда берілген интеграл 0,001 дәлдікпен жуықтап есептелінеді.

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} \approx 0,858$$

3.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР

3.2.1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер мына түрде беріледі

$$F(x, y, y') = 0 \quad (3.2.1)$$

Ал бұл теңдеу бірінше ретті туынды арқылы шешілсе, онда

$$y' = f(x, y) \quad (3.2.2)$$

Егер дифференциалданатын $y = \varphi(x)$ функциясы (3.2.2) теңдеуін қанағаттандырса, онда ол осы дифференциалдық теңдеудің шешімі деп аталады.

(3.2.2) теңдеудің жалпы шешімі $y = \varphi(x, C)$ түрінде беріледі. Мұнда C кез келген нақты сан.

(3.2.2) теңдеуінің дербес шешімі жалпы шешімдегі тұрақты C санының белгілі бір мәнінде алынады.

(3.2.1) немесе (3.2.2) дифференциалдық теңдеулерінің шешімінің графигін интегралдық қисық деп атайды.

Коши есебі. Берілген $x = x_0$ болғанда, $y = y_0$ болатын бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (3.2.2) теңдеуінің шешімін табуды Коши есебі деп атайды.

Дифференциалдық (3.2.2) теңдеуінің дербес шешімінің геометриялық мағынасы:

Берілген $M(x_0, y_0)$ нүктесінен өтетін интегралдық қисықты табу.

Төменде кейбір дифференциалдық теңдеулерді шешу әдістері көрсетіледі. Сондықтан дифференциалдық теңдеуді шешуге кіріспес бұрын, оның әуелі

түрін анықтап алу өте маңызды.

$$1. \quad y = \frac{1}{3}x^3 + x - 1 \text{ функциясы } y' - 3y = -x^3 + x^2 - 3x + 4$$

дифференциалдық теңдеуінің шешімі екенін көрсет.

Шешуі: Берілген функция дифференциалдық теңдеудің шешімі болу үшін, бұл функцияны теңдеуге қойғанда тепе-теңдік шығуы керек.

$$\text{Әуелі функцияның туындысын табалық: } y' = x^2 + 1$$

Енді y пен y' -терді дифференциалдық теңдеуге қоялық

$$x^2 + 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 + x - 1\right) = -x^3 + x^2 - 3x + 4$$

$$x^2 + 1 - x^3 - 3x + 3 = -x^3 + x^2 - 3x + 4$$

Тепе-теңдік алдық. Олай болса $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ функциясы берілген дифференциалдық теңдеудің шешімі болады.

2. $y = x^3 + C_1 x$ функциясы қандай дифференциалдық теңдеудің шешімі болады?

Шешуі: Берілген функцияның туындысын табалық

$$y' = 3x^2 + C_1$$

Осыдан $C_1 = y' - 3x^2$. Енді C_1 өрнегін берілген функцияға қойсақ, $y = x^3 + (y' - 3x^2) \cdot x$ немесе $xy' - y - 2x^3 = 0$.

Сонымен $y = x^3 + C_1 x$ функциясы $xy' - y - 2x^3 = 0$ дифференциалдық теңдеуінің шешімі болады.

3. $y'x - y - 2x^3 = 0$ дифференциалдық теңдеуінің $x = 3$ болғанда $y = 5$ болатын бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін тап.

Шешуі: Алдыңғы мысалда бұл теңдеудің жалпы шешімі $y = x^3 + C_1 x$ табылған болатын. Енді осы шешімнен бастапқы шарттарды қанағаттандыратын C_1 -дің сәйкес мәнін табалық:

$$5 = 27 + C_1 \cdot 3, \quad C_1 = -\frac{22}{3}..$$

$$\text{Сонда іздеп отырған дербес шешім } y = x^3 - \frac{22}{3} \cdot x$$

3.2.2. Айнымалылары бөлінетін дифференциалдық теңдеулер

Айнымалылар бөлінетін дифференциалдық теңдеу мына түрде беріледі:

$$M_1(x) \cdot M_2(y)dx + N_1(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \quad (3.2.3)$$

Бұл теңдеуді $N_1(x) \cdot M_2(y)$ өрнегіне бөлсек, онда айнымалылары бөлінген теңдеу аламыз.

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = 0 \quad (3.2.4)$$

(3.2.4) теңдеуінің жалпы интегралы

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = C \quad (3.2.5)$$

(3.2.3) теңдеуін мына түрге келтіруге болады:

$$N_1(x) \cdot M_2(y) \left(\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy \right) = 0$$

Сондықтан соңғы теңдеудің алдында тапқан (6.1.5) шешімінен басқа мына

$$N_1(x) \cdot M_2(y) = 0 \quad (3.2.6)$$

теңдеуді қанағаттандыратын да шешімі болады. Егер бұл шешім (3.2.5) шешіміне кірмесе, онда ол ерекше шешім деп аталады.

1. Теңдеуді шеш $y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0),$

$M(3; 4)$ нүктесінен өтетін интегралдық қисықты тап.

Шешуі:

Теңдеуді түрлендірелік $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad ydy = -x dx$

Бұл айнымалылары бөлінген теңдеу. Теңдеуді интегралдасак,

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{C}{2}, \quad x^2 + y^2 = C$$

Мұнда әрине $C > 0$. Сондықтан бұл шеңберлер жиынтығы болады. Енді $M(3; 4)$ нүктесінен өтетін шеңбердің теңдеуін жазу үшін, сәйкес C -ны табу керек:

$$9 + 16 = C, \quad C = 25.$$

Сондықтан $x^2 + y^2 = 25$ іздеп отырған шеңбер.

2. $y' \cdot \operatorname{tg} x = y$ дифференциалдық теңдеуінің $x = \frac{\pi}{2}$ болғанда, $y = 1$

болатын дербес шешімін тап.

Шешуі: Теңдеуді түрлендіреміз

$$\operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x dx$$

Бұл айнымалылары бөлінген теңдеу. Олай болса, оны интегралдап,

$$\ln y = \ln \sin x + \ln C, \quad y = C \sin x \text{ аламыз.}$$

Енді іздеп отырған дербес шешімді табу үшін, сәйкес С -ны табамыз:

$$1 = C \cdot \sin \frac{\pi}{2}, \quad C = 1.$$

Дербес шешім $y = \sin x$.

3.2.3. Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің жалпы түрі

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \quad (3.2.7)$$

мұндағы $p(x)$, $f(x)$ берілген функциялар. Бұл теңдеуді Бернулли әдісін қолданып шешеді. Шешім екі функцияның көбейтіндісі ретінде алынады.

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad (3.2.8)$$

Мұнда

$$v(x) = e^{-\int p(x) dx} \quad (3.2.9)$$

$$u(x) = \int e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) dx + C \quad (3.2.10)$$

Сонда,

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) dx + C \right] \quad (3.2.11)$$

1. Теңдеуді шеш: $y' + 2xy = e^{-x^2} \cdot \cos x$

Шешуі: Мұнда $p(x) = 2x$, $f(x) = e^{-x^2} \cdot \cos x$

Сонда $v(x) = e^{-2\int x dx} = e^{-x^2}$

$$u(x) = \int e^{x^2} \cdot e^{-x^2} \cdot \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

Іздеп отырған шешім мына түрде жазылады: $y = e^{-x^2} \cdot (\sin x + C)$.

2. Дифференциалдық теңдеуді шеш: $xy' - y = x^3$

Шешуі: Берілген теңдеуді түрлендірелік $y' - \frac{1}{x} \cdot y = x^2$

Сонда $p(x) = -\frac{1}{x}$, $f(x) = x^2$ болады.

Демек $v(x) = e^{-\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$

$$u(x) = \int e^{-\int \frac{dx}{x}} \cdot x^2 \cdot dx = \int e^{-\ln x} \cdot x^2 \cdot dx =$$

$$= \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Теңдеудің жалпы шешімі: $y = x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C \right)$

3. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ теңдеудің бастапқы шартын $y(0) = 3$

қанағаттандыратын дербес шешімін тап.

Шешуі: Мұнда $p = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Сонда $v(x) = e^{-\int \operatorname{tg} x dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x$

$$u(x) = \int e^{\int \operatorname{tg} x dx} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

Жалпы шешім мына түрде жазылады

$$y = \cos x \cdot (\operatorname{tg} x + C).$$

Енді бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімді табу үшін C -ның сәйкес мәнін табу керек

$$3 = \cos 0 \cdot (\operatorname{tg} 0 + C), \quad C = 3.$$

Сөйтіп іздеп отырған дербес шешім

$$y = \cos x \cdot (\operatorname{tg} x + 3).$$

3.2.4. Бернулли теңдеуі

Бернулли теңдеуі деп мына түрде берілген теңдеуді айтады

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^\alpha. \quad (3.2.12)$$

Мұнда $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Егер $\alpha = 0$, онда (3.2.7) теңдеуін аламыз, ал $\alpha = 1$ тең болса, онда айнымалылары бөлінген теңдеу аламыз.

Бернулли теңдеуін (3.2.7) теңдеуі сияқты шешуге болады, яғни шешімді $y = u(x) \cdot v(x)$ түрінде алуға болады:

Сонда

$$v(x) = e^{-\int p(x) dx}$$

$$u^{1-\alpha} = (1-\alpha) \cdot \left[\int f(x) \cdot v^{\alpha-1} \cdot dx + C \right] \quad (3.2.13)$$

Сондай-ақ (3.2.12) теңдеуін $Z = y^{1-n}$ ауыстыруын қолданып, сызықтық теңдеуге (3.2.7) келтіруге болады.

1. Теңдеуді шеш:
$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = x^2 \cdot y^{-1}$$

Шешуі: Мұнда $n = -1$. Сондықтан

$$Z = y^{1-(-1)} = y^2, \quad Z' = 2y \cdot y'.$$

Енді берілген теңдеуді түрлендіріп жазсақ,

$$y y' + \frac{1}{x} \cdot y^2 = x^2.$$

Осы теңдеуге Z және Z' өрнектерін қоялық:

$$\frac{1}{2} Z' + \frac{1}{x} \cdot Z = x^2, \quad Z' + \frac{2}{x} \cdot Z = 2x^2.$$

Сөйтіп, сызықтық теңдеу алдық. Оның шешімін $Z = u(x) \cdot v(x)$ түрінде іздейміз. Мұнда $p(x) = \frac{2}{x}$, $f(x) = 2x^2$

Сонда
$$v(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

$$u(x) = \int e^{2 \ln x} \cdot 2x^2 \cdot dx = 2 \int x^4 dx = \frac{2}{5} x^5 + C$$

Осыдан
$$Z = \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{5} \cdot x^5 + C \right), \quad y^2 = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot x^5 + C \right)$$

2 Бернулли теңдеуін шеш:

$$y' - \frac{2x}{1-x^2} \cdot y = (1-x^2) \cdot y^2$$

Шешуі: Мұнда $n = 2$. Сондықтан

$$Z = y^{1-2} = \frac{1}{y}, \quad Z' = -y^{-2} \cdot y'$$

Енді берілген теңдеуді түрлендірсек

$$y' \cdot y^{-2} - \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{1}{y} = 1 - x^2.$$

Соңғы теңдеуге Z және Z' қойсақ,

$$-Z' - \frac{2x}{1-x^2} \cdot Z = 1 - x^2, \quad .$$

$$Z' + \frac{2x}{1-x^2} \cdot Z = -(1-x^2)$$

Бұл сызықтық теңдеу. Шешімін $Z = u(x) \cdot v(x)$ түрінде іздейміз:

$$v(x) = e^{-\int \frac{2x}{1-x^2} dx} = e^{\ln(1-x^2)} = 1-x^2$$

$$u(x) = \int e^{\int \frac{2x}{1-x^2}} \cdot (x^2 - 1) \cdot dx = \int \frac{x^2 - 1}{1-x^2} dx = C - x$$

Сонда

$$Z = (1-x^2) \cdot (C-x), \quad y = \frac{1}{(1-x^2) \cdot (C-x)}$$

3.2.5. Біртекті теңдеулер

Мына түрде берілген теңдеу

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.2.14)$$

біртекті теңдеу деп аталады.

Бұл теңдеуді $Z = \frac{y}{x}$ ауыстыруды қолданып, айнымалылары бөлінетін теңдеуге келтіреді:

$$Z = \frac{y}{x}, \quad y' = Z \cdot x + Z$$

Енді (3.2.4) теңдеуін қайта жазсақ,

$$Z' \cdot x + Z = f(Z) \quad (3.2.15)$$

Бұл айнымалылары бөлінетін теңдеу:

$$\frac{dZ}{f(Z) - Z} = \frac{dx}{x}$$

1 Теңдеуді шеш
$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Шешуі: $Z = \frac{y}{x}$ ауыстыруын қолданамыз.
$$Z' \cdot x + Z = y'.$$

Сонда

$$Z' \cdot x + Z = Z + \operatorname{tg} Z, \quad Z' \cdot x = \operatorname{tg} Z$$

$$\frac{dZ}{\operatorname{tg} Z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \operatorname{ctg} Z dZ = \ln x + \ln C$$

$$\ln \sin Z = \ln x \cdot C, \quad \sin Z = x \cdot C$$

$$Z = \arcsin x \cdot C, \quad y = x \cdot \arcsin x \cdot C$$

2. Теңдеудің жалпы шешімін тап.

$$y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$$

Шешуі: Бұл біртекті теңдеу. $Z = \frac{y}{x}$ ауыстыруын пайдалансақ,

$$Z'x + Z = Z + \sin Z, \quad Z'x = \sin Z$$

$$\frac{dZ}{\sin Z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dZ}{\sin Z} = \ln \operatorname{tg} \frac{Z}{2}$$

екенін ескеріп,

$$\ln \operatorname{tg} \frac{Z}{2} = \ln x \cdot C, \quad \operatorname{tg} \frac{Z}{2} = x \cdot C.$$

$$y = 2 \cdot x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot C$$

Кейбір кезде біртекті теңдеулер басқаша түрде беріледі. Егер $f(x, y)$ функциясын

$$f(x \cdot t, y \cdot t) = t^k \cdot f(x, y)$$

түрінде жазуға болатын болса, онда $f(x, y)$ функциясы k дәрежелі біртекті функция деп аталады.

Сондай-ақ кез келген m дәрежелі біртекті $F(x, y)$ функциясы мына түрде жазылады

$$F(x, y) = X^m f\left(\frac{y}{x}\right).$$

3 Теңдеуді шеш:

$$(x^2 - y^2)dy - x \cdot y \cdot dx = 0$$

Шешуі: Мұнда dx пен dy алдында тұрған функциялар екінші ретті біртекті функциялар. Енді $Z \cdot x = y$ алайық. Сонда $dy = x dZ + Z dx$. Осы өрнекті берілген теңдеуге қоямыз

$$x^2(1 - Z^2) \cdot (x dZ + Z dx) - x^2 \cdot Z \cdot dx = 0$$

Бұл теңдеуді x^2 -қа қысқартсақ,

$$x(1 - Z^2) \cdot dZ - Z^3 \cdot dx = 0$$

$$\frac{1 - Z^2}{Z^3} dZ = \frac{dx}{x}, \quad \ln y = C - \frac{x^2}{2y^2}$$

3.2.6. Екінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Екінші ретті дифференциалдық теңдеулер мына түрде беріледі:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (3.2.16)$$

немесе

$$y'' = f(x, y, y') \quad (3.2.17)$$

Екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі

$$y = (x, C_1, C_2) \quad (3.2.18)$$

түрінде беріліп, оның өрнегіне екі тұрақты C_1, C_2 сандары кіреді.

Коши есебі. Берілген $x = x_0$ болғанда, $y = y_0, y' = y'_0$ болатын бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (3.2.17) теңдеуінің шешімін дербес шешім деп атайды.

Мұнда дербес шешімге сәйкес келетін C_1, C_2 сандары мына теңдеулер жүйесінен анықталады

$$\begin{cases} y_0 = (x_0, C_1, C_2) \\ y'_0 = '(x_0, C_1, C_2) \end{cases} \quad (3.2.19)$$

Төменде екінші ретті теңдеулердің интегралданатын қарапайым түрлері қарастырылады.

Интегралданатын екінші ретті теңдеулер қатарына белгілі бір әдістер қолданғанда реті төмендетілетін теңдеулер жатады. Сондай теңдеудің үш түрін қарастыралық:

а) (3.2.17) теңдеудегі оң жақта тұрған функция тек x - тен тәуелді, яғни

$$y'' = f(x) \quad (3.2.20)$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімі екі рет интегралданып табылады.

$$y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2 \quad (3.2.21)$$

1. Теңдеуді шеш $y'' = 12x^2 + 6$

Шешуі: Екі рет интегралдаймыз

$$y' = \int (12x^2 + 6) dx = 4x^3 + 6x + C_1$$

$$y = \int (4x^3 + 6x + C_1) dx = x^4 + 3x^2 + C_1x + C_2$$

2. $y'' = \cos kx$ теңдеуінің $x = 0$ болғанда, $y=0, y'=1$ болатын дербес шешімін тап.

Шешуі: Әуелі жалпы шешімін табалық

$$y' = \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C_1$$

$$y = \int \left(\frac{\sin kx}{k} + C_1 \right) dx = -\frac{\cos kx}{k^2} + C_1x + C_2$$

Енді берілген бастапқы шарттарға сәйкес келетін C_1 және C_2 -лерді табамыз. Ол үшін алдыңғы екі өрнектерге $x = 0$ қоямыз. Сонда

$$1 = C_1, \quad C_2 = \frac{1}{k^2}$$

Сөйтіп іздеп отырған дербес шешім

$$y = \frac{-\cos kx}{k^2} + x + \frac{1}{k^2}$$

б) (3.2.17) теңдеуінің өрнегінде y жоқ, яғни

$$y'' = f(y') \quad (3.2.22)$$

Бұл теңдеуді $Z = y'$ ауыстыру енгізу арқылы шешеміз. Сонда $Z' = y''$, $Z' = f(Z)$ аламыз. Бұл бірінші ретті теңдеу.

3. Теңдеуді шеш $y'' + \operatorname{tg} x \cdot y' = 0$

Шешуі: $Z = y'$ ауыстыру енгіземіз. Сонда $Z' + Z \cdot \operatorname{tg} x = 0$

Бұл айнымалылары бөлінетін теңдеу

$$\frac{dZ}{Z} + \operatorname{tg} x \cdot dx = 0, \quad \ln Z - \ln \cos x = \ln C_1$$

$$Z = C_1 \cdot \cos x \text{ немесе } y' = C_1 \cdot \cos x.$$

Осыдан

$$y = C_1 \int \cos x dx = C_1 \sin x + C_2$$

Сонымен жалпы шешім: $y = C_1 \cdot \sin x + C_2$

в) теңдеуінің өрнегінде тәуелсіз айнымалы x жоқ, яғни

$$y'' = f(y). \quad (3.2.23)$$

Бұл теңдеуді интегралдау x - тің орнына жаңа тәуелсіз айнымалылы y -ті

енгізу арқылы жүзеге асырылады $y' = Z(y)$.

Сонда $y'' = Z'_x = \frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = Z'_y \cdot y'$.

Сөйтіп $y' = Z, \quad y'' = Z'_y \cdot Z$.

4. Теңдеуді шеш: $y'' = y'^2 \cdot y^{-1}$

Шешуі: Бұл теңдеуде $Z = y'$ айнымалысын енгіzelік. Сонда $Z'' = Z'_y \cdot Z, \quad Z'_y \cdot Z = Z^2 \cdot y^{-1}, \quad Z'_y = Z \cdot y^{-1}$

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dy}{y}, \quad \ln Z = \ln y + \ln C_1, \quad Z = C_1 y$$

Енді $Z = y'$ екенін ескеріп,

$$y' = C_1 \cdot y, \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx, \quad \ln y = C_1(x + C_2),$$

$$y = e^{C_1(x+C_2)}$$

3.2.7. Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер деп мына түрде берілген теңдеулерді айтамыз

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \quad (3.2.22)$$

Мұндағы p, q тұрақты сандар.

Егер $f(x) = 0$ болса, онда бұл теңдеу біртекті теңдеу деп аталады.

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \quad (3.2.23)$$

$$\kappa^2 + p \cdot \kappa + q = 0 \quad (3.2.24)$$

(3.2.23) теңдеуінің жалпы шешімі (3.2.24) сипаттамалық теңдеуінің түбірлеріне байланысты анықталады:

1. Егер $\kappa_1 \neq \kappa_2$ болса, онда

$$y = C_1 e^{\kappa_1 x} + C_2 e^{\kappa_2 x} \quad (3.2.25)$$

2. Егер $\kappa_1 = \kappa_2$ болса, онда

$$y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{\kappa_1 x} \quad (3.2.26)$$

3. Егер $\kappa_1 = \alpha + i\beta, \quad \kappa_2 = \alpha - i\beta,$ болса онда

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta \cdot x + C_2 \sin \beta \cdot x) \quad (3.2.27)$$

1. Теңдеудің жалпы шешімін тап

$$y'' - 3 \cdot y' - 4 \cdot y = 0$$

Шешуі: сипаттамалық теңдеуін құрамыз

$$\kappa^2 - 3 \cdot \kappa - 4 = 0, \quad \kappa_1 = -1, \kappa_2 = 4$$

яғни $\kappa_1 \neq \kappa_2$. Олай болса, жалпы шешімді (3.2.25) формуласын пайдаланып жазамыз

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

2. $y'' - 4 \cdot y' + 4 \cdot y = 0$ теңдеуінің $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін тап.

Шешуі: характеристикалық теңдеу құрып, оны шешсек,

$$\kappa^2 - 4 \cdot \kappa + 4 = 0, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = 2.$$

Енді (3.2.26) формуласын қолданып, жалпы шешім жазамыз

$$y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$$

Бастапқы шарттарды пайдаланып, C_1, C_2 тұрақты сандарды табамыз

$$\begin{cases} 0 = (C_1 \cdot 0 + C_2) \cdot e^{2 \cdot 0} \\ 1 = (C_2 + C_1 + 0 \cdot C_2) \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot 0} \end{cases}$$

Осыдан $C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = 0$. Сонда іздеп отырған шешім

$$y = \frac{1}{2} x e^{2x}$$

3. Теңдеудің жалпы шешімін тап: $y'' - 6 \cdot y' + 25 \cdot y = 0$

Шешуі:

$$\kappa^2 - 6 \cdot \kappa + 25 = 0, \quad \kappa_1 = 3 + i4, \quad \kappa_2 = 3 - i4$$

Жалпы шешімді (3.2.27) формуласын қолданып жазамыз

$$y = e^{3 \cdot x} \cdot (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$$

Егер (3.2.22) теңдеуінде $f(x) \neq 0$ болса, онда теңдеу біртекті емес теңдеу деп аталады.

Біртекті емес теңдеудің (3.2.22) жалпы шешімі екі шешімнің қосындысынан тұрады:

$$y = y^* + \bar{y} \quad (3.2.28)$$

Мұнда $\bar{y}$ біртекті (3.2.23) теңдеудің жалпы шешімі. Ол (3.2.25) - (3.2.27)

формулаларымен анықталады. Ал y^* шешімі ол біртекті емес (3.2.22) теңдеудің кез-келген бір дербес шешімі.

Жалпы жағдайда біртекті емес теңдеудің дербес шешімі $f(x)$ функциясының түріне байланысты әр түрлі әдістерді қолданып табылады. Төменде екі жағдай қарастырылады.

$$1. f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \quad \alpha - \text{тұрақты сан.}$$

Бұл жағдайда іздеп отырған дербес шешімнің түрі α -ның мәніне байланысты болады:

а) егер $\alpha \neq \kappa_1, \alpha \neq \kappa_2$ болса, онда

$$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x) \quad (3.2.29)$$

түрінде ізделеді. Мұнда $Q_n(x)$ n -дәрежелі n белгісіз коэффициенттері бар көпмүше.

б) Егер $\alpha = \kappa_1$ немесе $\alpha = \kappa_2$ болса, онда

$$y^* = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \quad (3.2.30)$$

в) егер $\alpha = \kappa_1 = \kappa_2$ болса, онда

$$y^* = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \quad (3.2.31)$$

Мұндағы $Q_n(x)$ көпмүшелігіндегі белгісіз коэффициенттер анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданып табылады.

$$2. f(x) = e^{a \cdot x} \cdot (M \cos bx + N \sin bx).$$

Мұнда екі жағдай болуы мүмкін.

а) $a \pm ib$ сипаттамалық теңдеудің шешімі болмайды, яғни $a \pm ib \neq \alpha \pm i\beta$, онда дербес шешім

$$y^* = e^{a \cdot x} \cdot (A \cos bx + B \sin bx) \quad (3.2.32)$$

б) $a \pm ib = \alpha \pm i\beta$, яғни $a \pm ib$ сипаттамалық теңдеудің шешімі болады, онда

$$y^* = x \cdot e^{a \cdot x} \cdot (A \cos bx + C \sin bx) \quad (3.2.33)$$

3.2.8. Анықталмаған коэффициенттер әдісі

Мысалдар қарастырамыз.

1. Теңдеудің жалпы шешімін тап

$$y'' - 3 \cdot y' - 4 \cdot y = e^{2x} \cdot (x + 2)$$

Шешуі: сипаттамалық теңдеудің шешіміз

$$\kappa^2 - 3 \cdot \kappa - 4 = 0, \quad \kappa_1 = -1, \quad \kappa_2 = +4.$$

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{+4x}$$

Енді біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табалық.

Мұнда $\alpha = 2$, $\alpha \neq \kappa_1$, $\alpha \neq \kappa_2$, $n=1$, $P(x) = x+2$. Олай болса, дербес шешім (3.2.29) мына түрде ізделінеді

$$y^* = e^{2 \cdot x} \cdot (Ax + B) \quad (3.2.34)$$

Енді белгісіз коэффициенттерді (А және В) анықтау үшін осы шешімді берілген теңдеуге қоямыз. Ол үшін әуелі $y^{*'} , y^{*''}$ тауып аламыз

$$y^{*'} = (2Ax + A + 2B) \cdot e^{2 \cdot x}$$

$$y^{*''} = 4 \cdot (Ax + A + B) \cdot e^{2 \cdot x}$$

Сонда

$$4 \cdot (Ax + A + B) - 3 \cdot (2Ax + A + 2B) - 4 \cdot (Ax + B) = x + 2,$$

$$(4A - 6A - 4A) \cdot x + 4A + 4B - 3A - 6B - 4B = x + 2$$

$$-6A \cdot x + A - 6B = x + 2$$

Осы теңдік орындалуы үшін, теңдіктің екі жағында x -тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттер тең болу керек:

$$\begin{array}{l|l} x & -6A = 1 \\ x^0 & A - 6B = 2, \end{array} \quad A = -\frac{1}{6}, \quad B = -\frac{13}{36}$$

Сөйтіп дербес шешім

$$y = e^{2x} \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot x - \frac{13}{36} \right)$$

Енді біртекті емес теңдеудің шешімін жазамыз:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{+4x} + e^{2x} \left(-\frac{1}{6}x - \frac{13}{36} \right)$$

2. Теңдеуді шеш:

$$y'' + 4 \cdot y' = 2x^2 + 4x + 1$$

Шешуі: Мұнда $\alpha = 0$, $n = 2$, $p_2(x) = 2x^2 + 4x + 1$.

Сипаттамалық теңдеуді шешелік

$$\kappa^2 + 4\kappa = 0, \quad \kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = -4$$

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$\bar{y} = C_1 + C_2 \cdot e^{-4x}$$

Енді біртекті емес теңдеудің дербес шешімін іздейміз. Бұл мысалда $\alpha = 0$ және $\alpha = \kappa_1 = 0$. Сондықтан дербес шешімді мына түрде іздейміз

$$y^* = x \cdot Q_2(x) = x \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Осындағы A , B және C белгісіз коэффициенттерді табу үшін, осы шешімді берілген теңдеуге қоямыз. Әуелі y^* және y^{**} тауып алу керек

$$y^{*'} = 3A \cdot x^2 + 2Bx + C$$

$$y^{**} = 6Ax + 2B$$

Сонда

$$6Ax + 2B + 4 \cdot (3Ax^2 + 2Bx + C) = 2x^2 + 4x + 1$$

Енді x -тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді теңестірсек:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 12A = 2 \\ x & 8B + 6A = 4 \\ x^0 & 2B + 4C = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{3}{8} \\ C = \frac{1}{16} \end{array}$$

Сонымен іздеп отырған дербес шешім

$$y^* = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x,$$

Сонда толық шешім

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x$$

3. Теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$y'' - 2 \cdot y' + 5 \cdot y = 2\cos 3x + 9\sin 3x$$

Шешуі: Біртекті теңдеудің жалпы шешімін табалық:

$$\kappa^2 - 2\kappa + 5 = 0, \quad \kappa_{1,2} = +1 \pm 2i$$

$$\bar{y} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \cdot e^x$$

Енді біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табамыз. Мұнда $a=0$, $b=3$, яғни $a \pm ib \neq \alpha \pm i\beta$, $M=2$, $N=9$. Сондықтан дербес шешімді (3.2.32) түрінде іздейміз

$$y^* = A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x$$

Енді белгісіз коэффициенттерді табу үшін, әуелі $y^{*'}$, y^{**} тауып:

$$y^{*'} = -3A \cdot \sin 3x + 3B \cdot \cos 3x$$

$$y^{**} = -9A \cdot \cos 3x - 9B \cdot \sin 3x$$

сосын y^* , $y^{*'}$ және $y^{*''}$ - терді берілген теңдеуге қоямыз:

$$\begin{aligned} & -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - 2(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + \\ & + 5(A \cos 3x + B \sin 3x) = 2 \cos 3x + 9 \sin 3x \\ & (-4A - 6B) \cos 3x + (-4B + 6A) \sin 3x = 2 \cos 3x + 9 \sin 3x \end{aligned}$$

Енді теңдіктің екі жағындағы $\cos 3x$ пен $\sin 3x$ - тің алдындағы коэффициенттерді теңестіреміз

$$\left. \begin{aligned} \cos 3x & \left| \begin{aligned} -4A - 6B &= 2 \\ \sin 3x & \left| \begin{aligned} -4B + 6A &= 9 \end{aligned} \end{aligned} \right. \right\} B = -\frac{12}{13}, A = \frac{23}{26}$$

Сөйтіп іздеп отырған дербес шешім

$$y^* = \frac{23}{26} \cdot \cos 3x - \frac{12}{13} \cdot \sin 3x$$

Ал біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі

$$\begin{aligned} y = \bar{y} + y^* &= (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \cdot e^x + \\ &+ \frac{23}{26} \cdot \cos 3x - \frac{12}{13} \cdot \sin 3x \end{aligned}$$

Ескерту. Егер біртекті емес теңдеудің оң жағы екі функцияның қосындысы болса, яғни

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f_1(x) + f_2(x),$$

онда бұл теңдеудің дербес шешімін екі шешімнің қосындысы түрінде табуға болады

$$y^* = y_1^* + y_2^*$$

Мұнда y_1^* мына теңдеудің дербес шешімі

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f_1(x)$$

ал y_2^* төмендегі теңдеудің дербес шешімі

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f_2(x)$$

Жоғарыда біртекті емес теңдеудің дербес шешімін $f(x)$ -тің белгілі бір түріне байланысты анықталмаған коэффициенттер әдісін пайдаланып таптық. Сондай-ақ дербес шешімді табатын жалпы әдіс те бар. Ол тұрақтыларды вариациялау әдісі деп аталады.

3.2.9. Тұрақтыларды вариациялау әдісі

Бұл әдіс - екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің коэффициенттері тұрақты болмаған жағдайда да дербес шешімді табатын жалпы әдіс. Ол үшін сәйкес біртекті теңдеудің шешімі белгілі болу керек.

Айталық $y_1(x)$ және $y_2(x)$ біртекті теңдеудің дербес шешімдері болсын, онда оның жалпы шешімі мына

$$\bar{y} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) \quad (3.2.35)$$

түрінде жазылатыны белгілі.

Енді осы шешімдегі C_1, C_2 тұрақты сандарды тұрақты емес, яғни x - тен тәуелді деп, яғни $C_1(x), C_2(x)$ қарастыралық. Сөйтіп біртекті емес теңдеудің дербес шешімін мына түрде іздейміз

$$y^* = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) \quad (3.2.36)$$

Мұндағы $C_1(x)$ және $C_2(x)$ төмендегі теңдеулер жүйесінен табылады

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (3.2.37)$$

Бұл жүйенің анықтауышы

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Вронский анықтауышы деп аталады. Мұнда $y_1(x)$ және $y_2(x)$ өзара тәуелсіз шешімдер болғандықтан, $W \neq 0$ (3.2.37) жүйенің бір ғана шешімі болады.

1. Теңдеуді шеш

$$y'' - 3y' - 4y = e^{2x} \cdot (x + 2)$$

Шешуі: Біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{+4x}$$

Енді біртекті емес теңдеудің дербес шешімі мына түрде ізделінеді

$$y^* = C_1(x) \cdot e^{-x} + C_2(x) \cdot e^{4x}$$

Ал $C_1(x)$ және $C_2(x)$ (3.2.37) жүйесінен анықталады

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{-x} + C_2'(x) \cdot e^{4x} = 0 \\ -C_1'(x) \cdot e^{-x} + 4 \cdot C_2'(x) \cdot e^{4x} = e^{2x} \cdot (x + 2) \end{cases}$$

Осы жүйені шешіп:

$$C_1(x) = -\frac{1}{5} \cdot \int e^{3x} (x + 2) dx$$

$$C_2(x) = + \frac{1}{5} \cdot \int e^{-2x} (x + 2) dx$$

Осыдан

$$C_1(x) = -\frac{1}{5} \cdot \left[\frac{x+2}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} \cdot e^{3x} \right]$$
$$C_2(x) = -\frac{1}{5} \cdot \left[\frac{x+2}{2} e^{-2x} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2x} \right]$$

Енді табылған $C_1(x)$ және $C_2(x)$ - лерді дербес шешімнің өрнегіне қойсақ,

$$y^* = \left(-\frac{1}{6} \cdot x - \frac{13}{36} \right) \cdot e^{2x}$$

аламыз.