

Құрметті студент мырза!

Дүниежүзіндегі дамыған елдердің экономикалық деңгейі жоғары экономикалық көрсеткіштерімен анықталатыны белгілі. Қазақстан мемлекеті бәсекелестікке қабілетті 50 елдің қатарына қосылу мақсатын қойып отырған жағдайда сапалы білім беру және сапалы алу қажеттілігі күмән туғызбайды. Экономикалық зерттеулерде жиі қолданылатын математиканың негізгі салаларының бірі Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика.

Сіз Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика пәні бойынша лекция тыңдап және практикалық сабақтарға қатысып біраз білім жинақтадыңыз. Енді осы жинақтаған біліміңізді тестілік сұрақтарға жауап беру арқылы тексеру мүмкіндігіңіз бар. Тестілік сұрақтарға бірден жауап беруге көшпей тұрып әуелі төменде келтірілген қысқаша теориялық мәләметтермен танысып, еске түсіріп, сондай-ақ, типтік есептердің шығару үлгілірімен танысып біраз жаттығып алуға кеңсе береміз.

Пән үш бөлімнен тұрады:

1. Кездейсоқ оқиғалар
2. Кездейсоқ шамалар
3. Математикалық статистика

I БӨЛІМ**1. Кездейсоқ оқиғалар**

Анықтама (ықтималдықтың классикалық анықтамасы). Берілген тәжірибедегі тең мүмкінді элементарлық оқиғалар кеңістігінің A оқиғасына қолайлы оқиғалар санының осы кеңістіктің барлық оқиғалар санына қатынасы A оқиғасының ықтималдығы деп аталады.

m

$$\text{Бұл анықтамадан} \quad P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1.6)$$

формуласын аламыз. Мұндағы m - A оқиғасына қолайлы элементарлық оқиғалар саны, n - элементарлық оқиғалар кеңістігінің барлық оқиғалар саны. Осы анықтамадан (1.1.6) формула негізінде $m=n$ болса, $A=\Omega$ болады да, $P(A)=P(\Omega)=1$ аламыз, яғни ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең, енді $m=0$ болса, $A=\emptyset$ яғни мүмкін емес оқиға, онда $P(A)=0$, мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы нөлге тең. Әдетте ақиқат оқиғаны - U , ал мүмкін емес оқиғаны - V арқылы белгілейді, яғни $P(U)=1$, $P(V)=0$.

Мысал 1. A, B, C кезкелген оқиғалар болсын.

Мына $A_1 = \overline{ABC}$, $A_2 = \overline{A}BC$, $A_3 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$, $A_4 = \overline{ABC} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C}$,
 $A_5 = \overline{ABC} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$, оқиғаларының мағынасы қандай?

Шешуі: A_1 оқиғасы A, B және C оқиғаларының бірге пайда болуын

білдіреді; A_2 - A, B және C оқиғаларының ешқайсысының пайда болмағандығын көрсетеді. A_3 - $\underline{A}, \underline{B}$ және \underline{C} оқиғаларының ең болмағанда біреуінің пайда болатындығын білдіреді ($\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{AB}, \underline{AC}, \underline{BC}, \underline{ABC}$)

A_4 - A, B және C оқиғаларының тек қана біреуінің пайда болатындығын көрсетеді; A_5 - A, B, C оқиғаларының тек қана біреуі пайда болады немесе \underline{ABC} пайда болады, яғни $A_5 = A_2 + A_4$;

Мысал 2. Мерген нысанаға екі рет оқ атты. A_i - i -ші атқанда нысанаға тигізуі ($i=1,2$). Енді мына A - ең болмаса бір рет тигізді, B - бір рет қана тигізді, C - екі рет тигізді, D - екі рет тигізе алмады оқиғаларын A_1, A_2 оқиғалары арқылы өрнекте.

Шешуі: A_1, A_2 - сәйкес бірінші және екінші атқанда нысанаға тигізуі, ал $\underline{A_1}$ және $\underline{A_2}$ - сәйкес бірінші, екінші атқанында нысанаға тигізе алмауы.

Сонда $A_1 + A_2$ оқиғасы, екі оқиғаның қосындысының анықтамасы бойынша не A_1 не A_2 немесе $A_1 \cdot A_2$ оқиғаларының пайда болатынын, яғни ең болмағанда бір оқиғаның пайда болатынын көрсетеді, олай болса $A = A_1 + A_2$.

Сол сияқты $B = A_1 \cdot A_2 + \underline{A_1} \cdot A_2$ - тек бір рет нысанаға тигізу; $C = A_1 \cdot A_2$ - нысанаға екі рет тигізу; $D = \underline{A_1} \cdot \underline{A_2}$ - екі рет тигізбеуі.

Мысал 3. Урнаға 4 ақ, 9 қара және 7 қызыл бірдей шарлар салынған. Урнадан кез-келген бір шар алынады. Сонда ақ шар пайда болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: A - ақ шар пайда болуы болсын. Бұл тәжірибеде элементарлық ω_i ($i=1,20$) - оқиға дегеніміз - урнадан кез-келген бір шар алу. Шарлар бірдей болғандықтан бұл ω_i оқиғалары тең мүмкінді және өзара үйлесімсіз. Элементарлық оқиғалардың жалпы саны осы урнадағы шарлар санына тең $n=20$, ал A оқиғасына қолайлы элементарлық оқиғалары саны урнадағы ақ шарлар санына тең. Сондықтан ықтималдықтың анықтамасы бойынша:

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Ықтималдық анықтамасын пайдаланып есептер шығарған кезде комбинаторика формулалары жиі қолданылады. Сондықтан, табиғаты әр түрлі болып келетін, өзара айырмашылығы бар элементтерден құрастырылған комбинациялардың үш типін қарастырайық.

Анықтама: Берілген әртүрлі n элементтен m элемент бойынша орналастырулар деп, әрқайсысы бір-бірінен не құрамы бойынша, не орналасу реті бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Орналасырулардың жалпы саны мына формуламен анықталады

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1.1.7}$$

Анықтама: Берілген әртүрлі n элементтен n элемент бойынша алмастырулар деп, әрқайсысы бір-бірінен тек орналасу реті бойынша ғана ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Алмастырулардың жалпы саны:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1) = n! \quad (1.1.8)$$

Сондай-ақ алмастыруларды орналастырулардың жеке түрі ретінде қарастыруға болады, яғни

$$P_n = A_n^n = n!$$

Анықтама: Берілген әртүрлі n элементтен m элемент бойынша терулер деп, әрқайсысы бір-бірінен тек құрамы бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Терулердің жалпы саны мына формуламен есептелінеді:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (1.1.9)$$

Бұл жерде $n!$ (n факториал) мына түрде есептелінеді

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \text{ және } 0! = 1 \text{ деп қабылданады.}$$

Мысал 4. а) Әрбір $\Theta, H, Ж, E, Д, У$ әріптері бөлек қарталарға жазылған. Содан кейін қарталар араластырылып кез-келген ретпен бір қатарға орналастырылған. Сонда "ЖӨНДЕУ" сөзінің пайда болуының ықтималдығы қандай?

б) Әрқайсысында бір әріп жазылған қарталардан "БАРЛЫҚ" сөзі құрылған. Қарталарды араластырып, содан кейін бір-бірлеп алған ретімен сөз құрастырылады. Сонда "ЛАҚ" сөзінің пайда болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: а) Берілген алты қарталардың бір қатарға әртүрлі орналасуларының бір-бірінен айырмашылығы олардың қандай ретпен орналасқандығында болады. Сондықтан ондай орналасулардың жалпы саны (1.1.9) формуламен анықталады, яғни

$$n = P_6 = 6! = 720$$

Берілген алты картаның әрбір орналасу комбинацияларын оқиға ретінде қарастырсақ, онда олар тең мүмкінді, үйлесімсіз оқиғалар болады. Ал бізде қолайлы элементарлық оқиғалар саны $m=1$.

Себебі қарталар әртүрлі комбинациямен орналасқанда "ЖӨНДЕУ"

сөзі бір-ақ рет кезігеді. Сонда $P = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{720}$;

б) Берілген алты қарталардан үш карта бойынша орналастырулар саны $n = A_6^3$. Ал үш әріптен тұратын комбинациялардың бізге керегі біреу-ақ, яғни

"ЛАҚ", олай болса $m=1$. Сөйтіп $P = \frac{1}{A_6^3} = \frac{1}{120}$;

Осы жерде комбинаторика формулаларын пайдаланғанда мынадай екі ережелерді жиі колданатынымызды ескерте кеткен жөн.

Қосу ережесі: Егер әртүрлі A және B элементтерді сәйкес n және m рет жолмен таңдап алатын болсақ, онда осы екі элементтің біреуін (A -ны болмаса B -ны) $m+n$ рет жолмен таңдап алуға болады.

Көбейту ережесі: Егер бір группада m элемент, ал екінші группада n

элемент болса, онда әрбір группадан бір элементтен алып құрылған қосақтардың саны $n \cdot m$ көбейтіндісіне тең болады.

Расында бірінші группаның бір элементі екінші группаның әрбір элементімен қосақталынады және керісінше, сондықтан қосақтардың жалпы саны $m \cdot n$ көбейтіндісімен анықталады.

Мысал 5. Цехта 6 ер адам, 4 әйел адам жұмыс істейді. Табельдегі нөмірлері бойынша 7 адам таңдап алынды. таңдап алынған адамдардың ішінде 3 әйел бар болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Табельдегі нөмірлері бойынша барлығы 10 адамнан 7 адам таңдап алудың жалпы саны 10 элементтен 7 элемент бойынша алынған терулер саны сияқты есептелінеді, яғни

$$n = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!}$$

Ал 3 әйелді табельдік нөмірлері бойынша 4 әйелдің ішінен таңдап алудың саны (1.1.9) формула бойынша.

$$m_1 = C_4^3 = \frac{4!}{3!1!}$$

Сондай-ақ 6 ер адамнан 4 ер адам таңдаудың саны

$$m_2 = C_6^4 = \frac{6!}{4!2!}$$

Енді көбейту ережесін пайдалансақ таңдап алынған 7 адамның ішінде 3 әйел 4 ер адам болу мүмкіндіктерінің жалпы саны $m = m_1 \cdot m_2$ тең.

Сонымен анықталғалы отырған ықтималдық

$$P = \frac{m_1 \cdot m_2}{n} = \frac{C_4^3 C_6^4}{C_{10}^7} = \frac{1}{2}$$

Бұдан былай ықтималдықтың анықтамасын пайдаланып есептер шығарғанда, әуелі оқиғаны белгілі бір әріп арқылы белгілеп алу қажет. Содан кейін тең мүмкінді, үйлесімсіз элементарлық оқиғалардың жалпы санын, сосын қолайлы элементарлық оқиғалар санын есептеген жөн.

Мысал 6. Кітап сөресінде кездейсоқ ретпен 5 томнан тұратын анықтама қойылған:

а) Кітаптар бірінші томнан бесінші томға дейін дұрыс ретпен орналасуының ықтималдығын табу керек.

в) Ең болмағанда бір томның ретті орнында тұрмаған жағдайдың ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Сынақ ретінде кітап сөресінде кітаптардың кез-келген ретпен қойылуын қарастырайық. Сонда кітаптардың бұлай орналасуларының жалпы саны

$$n = P_5 = 5! = 120$$

1 А әріпі арқылы кітап сөресінде кітаптардың том нөмірлерінің өсу ретімен орналасуын білдіретін оқиғаны белгілейік. Бұл оқиғаға қолайлы элементарлық оқиға біреу-ақ. Сондықтан

1

$$P(A) = \frac{120}{120};$$

- 2 В әріпі арқылы, ең болмағанда бір том ретті орнында болмауын білдіретін оқиғаны белгілейік. Мұндай оқиғалар саны $m=n-1$, яғни $m=119$. Себебі кітаптардың том нөмірлері бойынша дұрыс орналасу саны бірге тең, ал қалған орналасулар В оқиғасын анықтайды. Сонымен $P(B)=119/120$;

Осы жерде А және В оқиғаларының қарама-қарсы екенін ескерсек,

онда $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ екенін пайдаланып $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{120} = \frac{119}{120}$ табамыз,

яғни бұрынғы жауапты алдық.

Мысал 7. Қорапта бірдей 5 бұйым бар. Оның үшеуі боялған. Қораптан кезкелген екі бұйым алынды.

- 1 Алынған екі бұйымның біреуі боялған бұйым болуының ықтималдығын табу керек.
- 2 Алынған бұйымның екеуі де боялған бұйым болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: 1. Қорапта 5 бұйымның екеуін барлығы $n = C_5^2$ тәсілмен алуға болады, ал алынған екі бұйымның біреуі боялған болса, сол бір боялған, бір боялмаған бұйымдарды сәйкес $m_1 = C_3^1$ $m_2 = C_2^1$ тәсілмен алуға болады. Сонда екі бұйымның бірі боялған болудың барлық қолайлы элементарлық оқиғалар саны

$$m = m_1 \cdot m_2 = C_3^1 \cdot C_2^1 = 6$$

$$P = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Сөйтіп

- 2 Алдыңғы пункттегі шығару жолын пайдаланып:

$$m_1 = C_3^2 = 3, m_2 = C_2^0 = 1$$

$$P = \frac{C_3^2 \cdot C_2^0}{C_5^2} = 0,3$$

Сонда

Ықтималдықтарды есептегенде қайталанбалы алмастырулар, орналастырулар және терулер де пайдаланылады.

2. ЫҚТИМАЛДЫҚТАРДЫ ҚОСУ ТЕОРЕМАСЫ

Егер А және В үйлесімсіз оқиғалар болса, онда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (1.2.3)$$

Егер А және В үйлесімді оқиғалар болса, онда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (1.2.4)$$

3. ЕҢ БОЛМАҒАНДА БІР ОҚИҒАНЫҢ ПАЙДА БОЛУЫНЫҢ ЫҚТИМАЛДЫҒЫ ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА

$A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$ оқиғалары жинақ бойынша тәуелсіз болсын. Осы оқиғалардың ең болмағанда біреуінің (A оқиғасы) пайда болуының ықтималдығы мына формуламен анықталады.

$$P(A) = 1 - P(\underline{A_1} \underline{A_2}, \dots, \underline{A_n}) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \quad (1.2.5)$$

Жеке жағдайда, егер $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ оқиғаларының пайда болуының ықтималдықтары бірдей болса, яғни

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p,$$

онда

$$(1.2.6) \quad P(A) = 1 - q^n$$

Мысал 1. 36 картаның ішінен кезкелген 2 карта алынсын. Осы екі картаның бір түсті болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Әуелі алынған екі картаның белгілі бір түске жататынының (айталық "қарға" болсын) ықтималдығын табалық. Белгілеу енгізелік. A - бірінші карта "қарға" болсын, B - екінші карта да "қарға" болсын. Бұл екі оқиға тәуелді оқиғалар, яғни B -ның пайда болу ықтималдығы A -ның пайда болуына, не пайда болмауына байланысты өзгеріп отырады. Сондықтан

$$P(A) = \frac{9}{36}, \quad P_A(B) = \frac{8}{35}$$

Осыдан

$$P(A \cdot B) = \frac{9}{36} \cdot \frac{8}{35} = \frac{2}{35}$$

Ал енді A_1, A_2, A_3, A_4 алынған екі карта сәйкес төрт түстің біріне жататындығын көрсететін өзара үйлесімсіз оқиғалар болсын. Сонда алынған екі картаның бірдей түсті (оқиға C) болуы A_1, A_2, A_3, A_4 оқиғаларының кезкелгені орындалса пайда болады, яғни

$$C = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 ;$$

$$\text{Олай болса} \quad P(C) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{8}{35}$$

Мысал 2. Екі мерген атыс ала”ында атыс жүргізуде. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы - 0,7, екіншісінікі - 0,8 тең. Егер екеуі де бір-бірден атыс жасаса, ең болмағанда біреуінің нысанаға дәл тигізетіндігінің ықтималдығы қандай?

Шешуі: Белгілеу енгізелік. A - бірінші мерген нысанаға дәл тигізді. B - екінші мерген нысанаға дәл тигізді. Бұл екі оқиға үйлесімді, себебі екі мерген де нысанаға дәл тигізуі мүмкін ғой. Сондықтан үйлесімді оқиғалардың қосындыларының ықтималдығы туралы теореманы (1.2.4) пайдаланып:

$$P(A + B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94$$

екенін табамыз.

Осы мысалды ең болмағанда бір оқиғаның пайда болуы (оқиға D) туралы теореманы пайдаланып та шығаруға болатынын көрсетелік. Шынында да D - оқиғасы ең болмаса біреуінің нысанаға тигізуі болсын. Сонда

$$P(D) = 1 - P(\underline{A})P(\underline{B}) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94$$

Бұл жерде $P(\underline{A}) = 1 - P(A) = 0,3$ $P(\underline{B}) = 1 - P(B) = 0,2$

Мысал 3. Екі жәшікке детальдар салынған. Бірінші жәшікте 10 деталь, оның үшеуі стандартты, екіншісінде - 15 деталь, онда 6 стандартты бар. Әрбір жәшіктен бір-бірден кез-келген деталь алынды. Алынған екі детальдіңде стандартты екенінің ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Белгілеу енгізелік. А - бірінші жәшіктен алынған деталь стандартты, В - екінші жәшіктен алынған деталь стандартты. Сондықтан $P(A) = 3/10, P(B) = 6/15$. Алынған екі детальде стандартты болуы үшін А·В оқиғасы пайда болуы керек. Бұл екі оқиғада үйлесімді, себебі екеуі бірдей пайда бола алады, сондай-ақ бұл оқиғалар тәуелсіз, себебі олардың пайда болуы бір-біріне байланыссыз. Сондықтан /1.2.2./ формуланы пайдалануға болады:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,12$$

§3. ТОЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ ФОРМУЛАСЫ БЕЙЕС ФОРМУЛАСЫ

Егер А оқиғасы, өзара үйлесімсіз, толық группа құратын B_1, B_2, \dots, B_n оқиғаларының (гипотезаларының) біреуімен бірге пайда болатын болса, онда А оқиғасының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P_{B_i}(A) \quad (1.3.1)$$

Мұндағы $P_{B_i}(A)$ - шартты ықтималдықтар. Бұл (1.3.1) формула толық ықтималдықтың формуласы деп аталады.

Сондай-ақ жоғарыдағы шарттар сақталғанда Бейес формуласы орындалады:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}$$

(1.3.2)

Бұл (1.3.2) формула гипотезалардың ықтималдығын А оқиғасы пайда болғаннан кейін есептеуге қолданылады.

Мысал 1. Қоймаға үш партия радиошамдар әкелінді. Алынған кез-келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,25; 0,5; 0,25 тең. Ал әрбір партиядағы радиошамдардың белгілі мерзім жұмыс істеп шығуларының ықтималдықтары сәйкес 0,7; 0,6; 0,8.

1. Осы партиялардың бірінен алынған радиошамның белгілі мерзім жұмыс істеп шығуының ықтималдығы қандай?

2. Мерзімді уақыт жұмыс істеп шыққан радиошамның екінші партиядан алынғандығының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: 1. Бұл мысалды шығару үшін толық ықтималдықтың формуласын және Бейес формуласын қолдану қажет. Ол үшін әуелі

қарастырып отырған оқиғаларды белгілеп алайық:

A - радиошам белгілі мерзім жұмыс істейді;

B_1 - радиошам бірінші партиядан алынған;

B_2 - радиошам екінші партиядан алынған;

B_3 - радиошам үшінші партиядан алынған.

Сонда $P(B_1)=0,25$ $P_{B_1}(A) = 0,7$

$P(B_2)=0,5$ $P_{B_2}(A) = 0,6$

$P(B_3)=0,25$ $P_{B_3}(A) = 0,8$

B_1, B_2, B_3 оқиғалар үйлесімсіз және толық группа құрайды. Толық группа құрайтындығын тексерейік.

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 0,25 + 0,5 + 0,25 = 1$$

Сонымен толық ықтималдық формуласының шарттары орындалады, олай болса

$$P(A) = 0,25 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,8 = 0,675$$

2. Енді мерзімді уақыт жұмыс істеп шыққан радиошамның екінші партиядан алынғандығының ықтималдығын Бейес формуласын пайдаланып табамыз.

$$P_A(B_2) = 0,5 \cdot 0,6 / 0,675 = 0,445$$

Сол сияқты $P_A(B_3), P_A(B_1)$ табалық

$$P_A(B_1) = 175/675, \quad P_A(B_3) = 200/675$$

Бұл жерде $P_A(B_1) + P_A(B_2) + P_A(B_3) = 1$ екенін ескертеміз.

Байқап отырғанымыздай, A оқиғасы пайда болғаннан кейін есептелінген мына $P_A(B_i)$ ($i=1, 2, 3$) шартты ықтималдықтар B_1, B_2, B_3 гипотезаларының ықтималдықтарының өзгергенін көрсетеді.

Ескерту ретінде айтарымыз, бұл (1.3.1) және (1.3.2) формулаларды қолданғанда алынған B_1, B_2, \dots, B_n гипотезаларының үйлесімсіздігін және толық группа құратындығын тексеру қажет.

§4. ТӘУЕЛСІЗ СЫНАҚТАР ТІЗБЕГІ

Нәтижелерінде тәуелсіз оқиғалар пайда болатын сынақтарды тәуелсіз сынақтар деп атайды. Екі ғана нәтижесі бар тәуелсіз сынақтарды қарастыралық. Мұндай сынақтарға теңге лақтыру, бұйымның сапалылығын тексеру, детальдің жарамдылығын тексеру т.б. сынақтар жатады.

Сонымен аталған екі нәтижені "А оқиғасы пайда болады" және "А оқиғасы пайда болмайды" деп атаймыз, сондай-ақ осы екі оқиғаның бір-біріне қарама-қарсы екенін ескеріп, сәйкес ықтималдықтарын $P(A)=p$ және $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ деп аламыз, яғни A оқиғасының ықтималдығы тұрақты. Осындай шарттар орындалғанда Бернуллі схемасы орынды деп айтады.

БЕРНУЛЛИ ФОРМУЛАСЫ

Тәуелсіз n сынақтарда ықтималдығы тұрақты болатын A оқиғасының

дәл k рет пайда болуының ықтималдығы Бернулли формуласымен есептеледі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (1.4.1)$$

Мұндағы $p=P(A)$, $q=1-p=P(\bar{A})$. Бұл формуланы кейде биномдық деп те атайды.

А оқиғасының ең ықтималды m_0 рет пайда болуы мына теңсіздіктен анықталады:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \quad (1.4.2)$$

Егер $np - q$ бүтін сан болса, онда m_0 -дің екі бүтін мәні болады, ал $np - q$ бүтін сан болмаса, онда m_0 -дің бір ғана бүтін мәні болады.

Бернулли формуласын пайдаланып мына оқиғалардың ықтималдығын анықтауға болады:

1. Тәуелсіз n сынақтарда А оқиғасының k реттен кем пайда болатындығының ықтималдығы:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} P_n(i) \quad (1.4.3)$$

2. k реттен артық болуының ықтималдығы:

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n) = \sum_{i=k+1}^n P_n(i) \quad (1.4.4)$$

3. Кем дегенде k рет пайда болуының ықтималдығы:

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n) = \sum_{i=k}^n P_n(i) \quad (1.4.5)$$

4. k реттен артық емес пайда болуының ықтималдығы

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k) = \sum_{i=0}^k P_n(i) \quad (1.4.6)$$

Бернулли схемасында сынақтар тәуелсіз болғандықтан, осы сынақтарда ең болмаса бір оқиғаның пайда болуының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P = 1 - q^n \quad (1.4.7)$$

Мысал 1. Шахмат ойнау шеберлігі тең екі шахматшы ойын көрсетуде. Тең аяқтаған ойынды есептегенде:

- 1 Төрт партияның үшеуін ұту мен сегіз партияның бесеуін ұтудың ықтималдықтарын табу керек. Қайсысының ықтималдығы жоғары?
- 2 Төрт партиядан кем дегенде үш партия ұту мен сегіз партиядан кем дегенде 5 партия ұтудың ықтималдықтарын табу керек. Қайсысының ықтималдықтары жоғары?

Шешуі: Ойнау шеберлігі тең болғандықтан олардың әрбір партиядан ұту ықтималдықтары 0,5 тең.

1. Төрт партиядан үш ұтыстың ықтималдығы Бернулли формуласы (1.4.1) бойынша

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Сегіз партияда 5 ұтыстың ықтималдығы

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}$$

Осыдан $P_4(3) > P_8(5)$, яғни төрт партиядан үш ұтыстың ықтималдығы, сегіз партиядан 5 ұтыстың ықтималдығынан жоғары.

2. Төрт партиядан кем дегенде үш ұтыстың ықтималдығы

$$P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

Сегіз партиядан кем дегенде 5 партия ұтудың ықтималдығы

$$P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = \frac{93}{256}$$

Осыдан $93/256 > 5/16$, яғни сегіз партиядан кем дегенде бес ұтыстың ықтималдығы, төрт партиядан кем дегенде 3 партия ұтыстың ықтималдығынан жоғары.

Ескерту: Егер Бернуллі схемасында сынақтар саны үлкен болса, онда Бернуллі формуласын пайдалану үлкен арифметикалық есептеулерге келтіреді. Сондықтан бұл жағдайда жуықтап есептеу формулаларын қолданады.

Егерде $P(A)=p$ мәні 0,5-тің ма'айында болса, онда Муавр-Лапласстың локалдық және интегралдық жуықтау формулалары қолданылады.

МУАВР-ЛАПЛАСТЫҚ ЛОКАЛДЫҚ ТЕОРЕМАСЫ

Тәуелсіз n сынақтарда ықтималдығы тұрақты A оқиғасының тура k рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad (1.4.8)$$

МУАВР-ЛАПЛАСТЫҚ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕОРЕМАСЫ

Тәуелсіз n сынақтарда ықтималдығы тұрақты A оқиғасының k_1 -ден кем емес k_2 -ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x_i) = \int_0^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{\sqrt{2\pi}}; \quad (1.4.9)$$

Мұндағы $\varphi(x)$, $\Phi(x_i)$ функцияларының мәндерінің кестесі бөлек келтірілген.

Муавр-Лапласың (1.4.9) формуласын пайдаланып тәуелсіз сынақтарда А оқиғасының ықтималдығының салыстырмалы жиіліктен ауытқуының абсолют шамасының ықтималдығы мына формула арқылы табылады:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \quad (1.4.10)$$

Егерде $P(A)=p$ мәні 0,5 -тен едәуір кіші болса онда басқа жуықтау формуласы - Пуассон формуласы қолданылады:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda=np \quad (1.4.11)$$

Жаттығу есептері

1. Жәшіктегі 15 детальдің 10-ны боялған. Жинаушы кез келген 3 деталь алды. Алынған 3 деталь де боялғандығының ықтималдығы қандай?
2. Бірінші жәшікте нөмірлері 1-ден 5 - ке дейін, ал екіншісінде 6-дан 10-ға дейін шарлар бар. Әрбір жәшіктен бір-бірден шар алынды. Алынған екі шардың нөмірлерінің қосындысы 11 болуының ықтималдығы қандай?
3. Жәшіктегі 10 детальдің 4-і боялған. Деталь жинаушы 3 деталь алды. Алынған үш детальдің ең болмағанда біреуі боялғандығының ықтималдығын табу керек.
4. Ақшалай-заттай лотереяда әрбір 10000 билетке 150 заттай және 50 ақшалай ұтыс шығады. Бір билеті бар адамға не заттай, не ақшалай ұтыс шығуының ықтималдығы қандай?
5. Урнада 10 қызыл, 5 көк және 15 ақ шарлар бар. Түсті шардың алынуының ықтималдығы қандай?
6. Екі жәшікте 20 детальден бар. Оның ішінде бірінші жәшікте 17 стандартты, екінші жәшікте 15 стандартты деталь бар. Екінші жәшіктен кез-келген бір деталь алынып бірінші жәшікке салынған. Содан кейін бірінші жәшіктен кез-келген бір деталь алынды. Бірінші жәшіктен алынған детальдің стандартты болуының ықтималдығын табу керек.
7. Гаражда 5 машина бар. Кез-келген бір сәтте машиналардың жұмыс істеу ықтималдығы 0,8-ге тең. Қалаған бір сәтте үш машинаның жұмыс істеуінің ықтималдығы қандай?
8. Цехтағы 6 мотордың әрқайсысының белгілі бір сәтте істеп тұрғандығының ықтималдығы 0,8-ге тең.
9. Белгілі бір сәтте 4 мотордың істеп тұруының ықтималдығын табу керек.

II БӨЛІМ. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

Айталық элементарлық оқиғалар кеңістігі $\Omega = \{\omega\}$ берілсін. Егер осы кеңістікте анықталған $X(\omega)$ функциясы сандық мәндер қабылдап, кез-келген x үшін мына ықтималдық

$$P(X < x) = P\{\omega: X(\omega) < x\}$$

анықталған болса, онда $X\{\omega\}$ функциясын кездейсоқ шама деп атайды.

Кездейсоқ шамалар мен кездейсоқ оқиғаларды бір-бірінен ажырата білген жөн. Анықтамадан байқап отырғанымыздай кездейсоқ шама міндетті түрде пайда болады, тек оның қандай мәнді қабылдайтыны алдын-ала белгісіз. Ал кездейсоқ оқиғаның пайда болуының өзі кездейсоқ жай.

Мысалы, теңге лақтыру тәжірибесін қарастырайық. Осы тәжірибеде кездейсоқ оқиға деп елтаңбаның немесе цифрдің пайда болуын айтамыз, ал кездейсоқ шама ретінде тәжірибе нәтижесінде елтаңбаның пайда болу санын қарастыруға болады. Бұл кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері $0, 1, 2, \dots, n$, яғни тәжірибе нәтижесінде елтаңба мүлде пайда болмауы мүмкін, немесе 1 рет, 2 рет, ..., n рет пайда болуы мүмкін. Кездейсоқ шамалар дискретті және үзіліссіз болып бөлінеді.

Кездейсоқ шамалардың кейбір мысалдарын келтірелік:

- 1 Тәуелсіз n сынақтарда тұрақты ықтималдықпен A оқиғасының пайда болу саны;
- 2 Бір цех өнімдерінің ішіндегі сапасыз бұйымдар саны;
- 3 Снарядтың үшу алыстығы;
- 4 Телефон станциясына белгілі бір уақыт мерзімінде келіп түскен тапсырыстар саны, т.б.

Осы мысалдардан көріп отырғанымыздай кездейсоқ шама тәжірибенің кездейсоқ нәтижесінің сандық сипаттамасы екенін байқаймыз.

§1. ДИСКРЕТТІ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

Анықтама. Кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндерінің саны ақырлы болса немесе тізбек түрінде жазылса, онда ондай кездейсоқ шамаларды дискретті кездейсоқ шамалар деп атайды.

Дискретті кездейсоқ шаманы анықтау үшін үлестірім қатары - үлестірім кестесі құрылады.

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Кестенің жоғары жолында кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері, ал төменгі жолында - сол мәндердің сәйкес ықтималдықтары келтірілген.

Мұнда $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

1.1. ҮЛЕСТІРІМ ЗАҢДАРЫ

1. БИНОМДЫҚ ҮЛЕСТІРІМ

Егер мүмкін мәндері $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ болып, ал осы мүмкін мәндерді қабылдау $X=k$ ықтималдықтары Бернулли формуласымен анықталса

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (2.1.1)$$

онда кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген деп аталады.

Сонымен биномдық үлестірім заңдылығымен берілген дискретті кездейсоқ шаманы - тұрақты ықтималдықты A оқиғасының n тәуелсіз сынақтарда пайда болуының саны ретінде қарастыруға болады.

2. ПУАССОН ҮЛЕСТІРІМІ

Егер тәуелсіз сынақтарда n үлкен сан болса және p -ның шамасы аз болса, онда кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарын Пуассон формуласымен

$$P(X=x) = P_n(x) \approx \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np \quad (2.1.2)$$

есептеу керек.

Бұл жағдайда кездейсоқ шама Пуассондық үлестірім заңымен берілген дейді. Бернулли схемасына негізделген тағыда басқа үлестірімдерді келтірелік.

3. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ҮЛЕСТІРІМ

Айталық тәуелсіз сынақтарда Бернулли схемасы қарастырылсын, мұнда $P(A)=p$. Сонда қатарынан $(k-1)$ рет \bar{A} оқиғасы пайда болып, ал k -шы ретте A оқиғасының пайда болу ықтималдығы мына формуламен анықталады

$$\Gamma(k, p) = (1-p)^{k-1} p^m \quad (2.1.3)$$

Ықтималдығы осы формуламен анықталған $(k=1, 2, 3, \dots, n)$ кездейсоқ шаманы геометриялық үлестірімімен берілген дейді.

4. ПАСКАЛЬ ҮЛЕСТІРІМІ

Тәуелсіз сынақтарда \bar{A} оқиғасы қатарынан $k-1$ рет пайда болып, сосын A оқиғасы m рет пайда болуының ықтималдығы мына формуламен анықталады.

$$P(k, p, m) = C_{k+m-2}^{k-1} (1-p)^{k-1} p^m \quad (2.1.4)$$

Ықтималдығы осы формуламен анықталған кездейсоқ шама Паскаль үлестірімімен берілген дейді. Геометриялық үлестірім Паскаль үлестірімінің жеке жағдайы, яғни $m=1$ болғанда геометриялық үлестірімді аламыз.

5. ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ҮЛЕСТІРІМ

Егер X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері $0, 1, 2, 3 \dots k$ болып, ал сәйкес ықтималдықтары мына формуламен

$$p = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} \quad (2.1.5)$$

анықталса, онда кездейсоқ шама гипергеометриялық үлестіріммен берілген дейді.

Мысал 1. Жәшікте барлығы 10 шар бар, олардың 7 - і қара 3-і көк шарлар. Жәшіктен кез-келген 5 шар алынды. Сол 5 шардың үшеуі қара болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: Осындай мазмұнды есепті классикалық анықтаманы және комбинаторикадағы қосу және көбейту ережелерін пайдаланып шығаруға болады. Бұл есепті солай шығарса $P = C_7^3 \cdot C_3^2 / C_{10}^5$ болады.

Енді осы есепті жалпы түрде келтірейік.

Мысал 2. Жәшікте барлығы N шарлар бар, оның ішінде n қара шар бар, ал $(N-n)$ - көк шарлар. Жәшіктен кез-келген m шар алынды. Сол алынған m шардың ішінде k қара шар болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: x - жәшіктен алынған шарлар саны. Бұл кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері $0, 1, 2, \dots, m$.

Жәшіктегі N шардан m шарды әртүрлі C_N^m жолмен алуға болады, ал n қара шарлардан k шарды әртүрлі C_n^k жолмен алуға болады, сонда алынған m шардың ішінде $m-k$ көк шарлар болғандықтан барлық $N-n$ көк шарлардан $m-k$ көк шарды C_{N-n}^{m-k} жолмен алуға болады. Сонымен жәшіктен алынған шардың k қара шарын C_n^k жолмен, ал қалған $m-k$ көк шарды C_{N-n}^{m-k} жолмен алуға болады екен. Олай болса комбинаторикадағы көбейту ережесін қолдансақ, алынған m шардың ішінде k - қара шар, $m-k$ - көк шар болуы $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$ жолмен анықталады.

Сонда ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша

$$P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5}$$

болады.

Сөйтіп X -кездейсоқ шама гипергеометриялық үлестіріммен берілгеніне көз жеткіздік.

1.2. ДИСКРЕТТІ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ.

Дискретті кездейсоқ шаманың математикалық үміті деп оның мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарына көбейтінділерінің қосындысын айтады:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (2.1.6)$$

Дискретті кездейсоқ шаманың дисперсиясы деп, оның өзінің математикалық үмітінен ауытқуының квадратының математикалық үмітін айтады:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x_i))^2 \cdot p_i \quad (2.1.7)$$

Дисперсияны есептеудің жеңілдетілген формуласы :

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i\right)^2 \quad (2.1.8)$$

Дискретті кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуы мына формуламен есептелінеді:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Дискретті кездейсоқ шаманың бастапқы k - ретті моменті деп осы кездейсоқ шаманың k -шы дәрежесінің математикалық үмітін айтады:

$$\nu_k(X) = M(X^k) = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i \quad (2.1.9)$$

Дискретті кездейсоқ шаманың k - ретті орталық моменті деп, оның өзінің математикалық үмітінен ауытқуының k -шы дәрежесінің математикалық үмітін айтады :

$$\mu_k(X) = M[X - M(X)]^k = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x_i))^k \cdot p_i \quad (2.1.10)$$

Кездейсоқ шаманың математикалық үміті бірінші бастапқы моментіне, ал дисперсиясы - екінші орталық моментіне тең :

$$M(X) = \nu_1(X) \quad , \quad D(X) = \mu_2(X)$$

Сондай-ақ екінші, үшінші және төртінші орталық моменттер

бастапқы моменттер арқылы төмендегідей өрнектеледі :

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2 \quad , \quad \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 \quad , \\ \mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Дискретті кездейсоқ шаманың ең ықтималды мәнін оның Модасы (M_0) деп атайды.

Айталық кездейсоқ шаманың n мүмкін мәндері болсын.

$$P(X < M_D) = P(X > M_D)$$

теңдігі орындалса, онда M_D кездейсоқ шаманың медианасы деп аталады.

Егер $n=2k$ болса, онда $M_D = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$, егерде $n=2k+1$ болса, онда

$$M_D = x_{k+1} ;$$

Сондай-ақ қарастырылып отырған кездейсоқ шаманың үлестірім заңын қалыпты үлестіріммен салыстыру үшін E_k эксцесс және A_s асимметрия сипаттамалары қарастырылады. Мұнда

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma_4} - 3, \quad A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_3}$$

Ескерту : қалыпты үлестірім үшін $E_k = 0$, $A_s = 0$

Математикалық үміттің қасиеттері

1. $M(c) = c$,
2. $M(cx) = cM(x)$
3. $M(x \pm y) = M(x) \pm M(y)$
4. $M(xy) = M(x) \cdot M(y)$

Дисперсияның қасиеттері

1. $D(x) \geq 0$,
2. $D(c) = 0$
3. $D(cx) = c^2 D(x)$
4. $D(x \pm y) = D(x) + D(y)$

Мұндағы x және y тәуелсіз кездейсоқ шамалар.

Жоғарыда келтірілген үлестірім заңдарының математикалық үміттері мен дисперсияларын келтірелік.

1. Биномдық үлестірім

$$M(x) = np, \quad D(x) = npq, \quad A_s = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \quad E_k = \frac{1-6pq}{\sqrt{npq}}$$

2 Пуассон үлестірімі

$$M(x) = \lambda, \quad D(x) = \lambda, \quad A_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad E_k = \frac{1}{\lambda}$$

3. Геометриялық үлестірім

$$M(x) = \frac{1}{p}, \quad D(x) = \frac{1-p}{p^2} \quad (2.1.12)$$

4. Паскаль үлестірімі

$$M(x) = \frac{m}{p}, \quad D(x) = \frac{m(1-p)}{p^2}$$

5. Гипергеометриялық үлестірім

$$M(x) = mp, \quad D(x) = \frac{N-m}{N-1} mpq$$

Мұнда $m < 0,1 \cdot N$ болғанда $D(x) \approx npq$ болады, яғни биномдық үлестірімнің дисперсиясына жуықтап тең болады.

Сондықтан $m < 0,1 \cdot N$ болғанда

$$\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} \approx C_m^k p^k q^{m-k}$$

болады. Осы жағдайда $p \approx \frac{m}{N}$ болады.

Мысал 3. Дискретті кездейсоқ шама мына үлестіріммен берілсін

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,4	0,2	0,2

Сандық сипаттамаларын тап.

Шешуі :

$$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 = 0,4$$

Дисперсияны /2.1.8/ формуласын қолданып табамыз. Ол үшін әуелі

X ²	1	0	1	4
p	0,2	0,4	0,2	0,2

жазамыз. Сонда $D(X) = (1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,2) - (0,4)^2 = 1,04$,

$M_0=0$. Себебі кездейсоқ шаманың $x=0$ мәні ең үлкен ықтималдықпен

кабылданады. Енді M_D табу үшін $n = 4$ екенін ескеріп $M_D = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ аламыз.

Сондай-ақ, жоғарыда келтірілген (2.1.9) - (2.1.11) формулаларын пайдаланып

$$\nu_1 = M(X) = 0,4$$

$$\mu_2 = D(X) = 1,04$$

$$\nu_2 = 1,2$$

$$\mu_3 = 0,288$$

$$\nu_3 = 1,6$$

$$\mu_4 = 2,1152$$

$$\nu_4 = 3,6$$

$$A_s = 0,274$$

$$E_k = -1,023$$

табамыз. Мұнда $A_s > 0$ олай болса дифференциалдық функцияның графигі о” жаққа ”созы”қы”, ал $E_k < 0$ сондықтан бұл график Гаусс қисығына қарағанда ”жатыңқы”.

Егер бірдей үлестіріммен анықталған n өзара тәуелсіз кездейсоқ шамалар X_1, X_2, \dots, X_n берілсе және

$$M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n) = a, \quad D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_n) = \sigma^2$$

болса, онда бұл кездейсоқ шамалардың арифметикалық ортасы да кездейсоқ шама болады, яғни

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Бұл арифметикалық ортаның математикалық үмітін табалық

$$M(\bar{x}) = M\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(M(x_1) + \dots + M(x_n)) = a$$

яғни $M(\bar{x}) = a$

Енді дисперсиясын табалық

$$D(\bar{x}) = D\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D(x_1) + \dots + D(x_n)) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.1.13)$$

яғни

Сонымен (2.1.13) формуладан бірнеше өзара тәуелсіз кездейсоқ шамалардың арифметикалық орташасының дисперсиясы берілген кездейсоқ шамалардың дисперсиясынан едәуір кем екендігі көрінеді. Сондықтан өмірде керекті параметрді анықтау кезінде жүргізілген қайталанбалы өлшеулерде дисперсияның осы қасиетін пайдаланады. Сөйтіп іздеп отырған параметрдің мәні ретінде қайталанған өлшеулер кезінде алынған мәндердің арифметикалық орташа мәнін алады.

§2. ҮЗІЛІССІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

Анықтама. Егер кездейсоқ шама өзінің мүмкін мәндерін $[a, b]$ интервалында қабылдаса және бұл мәндерді нөмірлеуге болмаса, онда ол үзіліссіз кездейсоқ шама деп аталады.

Мысалы поездың кешігу уақыты, атылған оқтың ұшу алыстығы т.б. кездейсоқ шамалардың мүмкін мәндері белгілі бір интервалды қамтып жатады.

Кездейсоқ шаманың үлестірім заңдылықтарын әртүрлі жолмен қарастыруға болады. Төменде X -кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері тиянақты x санынан кіші болу ықтималдығы қарастырылады.

Анықтама. Үлестірім функциясы деп X -кездейсоқ шамасының мәндері тиянақты x санынан кіші болу ықтималдығын айтады.

Үлестірім функциясы $F(x)$ арқылы белгіленеді. Сонда анықтама бойынша

$$F(x) = P(X < x)$$

Бұл функцияны сондай-ақ интегралдық үлестірім функциясы деп те атайды.

Негізгі қасиеттері:

$$\begin{aligned} 1 & P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \\ 2 & F(x_2) \geq F(x_1), \quad x_2 \geq x_1 \\ 3 & \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Дискретті кездейсоқ шама үшін интегралдық үлестірім функция былай анықталады:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i \quad (2.2.2)$$

Мұндағы x_1, x_2, \dots, x_n дискретті кездейсоқ шаманың қабылдайтын мүмкін мәндері, ал p_1, p_2, \dots, p_n сол мәндердің қабылдануының сәйкес ықтималдықтары. Мына (2.2.2) қосындысы тек $x_i < x$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x_i үшін олардың сәйкес ықтималдықтарының қосындысы болады; x берілген тиянақты сан.

Анықтама: Үзіліссіз кездейсоқ шаманың дифференциалдық функциясы (үлестірім тығыздығы) деп үлестірім функциясының бірінші туындысын айтады.

Дифференциалдық функцияны $f(x)$ деп белгілейді. Сонда анықтама бойынша

$$f(x)=F'(x) \quad (2.2.3)$$

Негізгі қасиеттері:

$$1. f(x) \geq 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$3. P(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

$$4. F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

Мысал 1. Айталық X - дискретті кездейсоқ шама үлестірім кестесі арқылы берілген болсын

	0	1	3	3,5
	0,1	0,4	0,2	0,3

X - тің үлестірім функциясын табыңыз.

Шешуі: Ол үшін (2.2.2) формуласын пайдаланамыз. Кестеден байқағанымыздай $x < 0$ болса, онда X -тің қабылдайтын мүмкін мәндері жоқ. Ал $0 \leq x < 1$ болғанда X -тің қабылдайтын бір мәні, ол - 0; енді $1 \leq x < 3$ болса, онда X -тің қабылдайтын екі мәні бар, ол 0,1; т.с.с. ақырында $x \geq 3,5$ болса, онда X өзінің барлық мүмкін мәндерін қабылдайды, ол - 0, 1, 3, 3, 5.

Енді (2.2.2) формуласына түсінік келтірелік. Жоғарыда айтқанымыздай $x < 0$ болса, онда есептің шарты бойынша 0-санының сол жағында берілген кездейсоқ шаманың ешбір мүмкін мәні жоқ, яғни кездейсоқ шаманың өзінің мүмкін мәндерінің біреуін қабылдауын оқиға екенін ескерсек, онда оның 0-санының сол жағынан мән қабылдауы мүмкін емес оқиға, олай болса

$$F(x) = P(x < 0) = 0$$

Енді $x < 1$ болса, онда 1- санының сол жағында есептің шарты бойынша кездейсоқ шаманың бір мәні бар, ол 0 - саны. Олай болса

$$F(x) = P(x < 1) = P(x = 0) = 0,1$$

Сол сияқты $x < 3$ болғанда, 3-санының сол жағында кездейсоқ шаманың екі мәні бар. Ол осы мәндердің біреуін қабылдауы мүмкін, яғни екі оқиғаның біреуі пайда болады дегеніміз. Сондай-ақ, бұл екі оқиға үйлесімсіз, сондықтан үйлесімсіз оқиғалардың қосындысының ықтималдығы туралы теореманы пайдаланып:

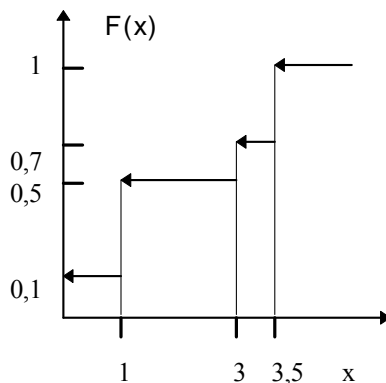
$$F(x) = P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) = 0,1 + 0,4 = 0,5$$

Осы жолмен $x < 3,5$ болғанда және $x > 3,5$ болғандағы $F(x)$ -ның мәндерін есептеуге болады.

Сонымен қорытындысында:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,1, & 0 \leq x < 1 \\ 0,5, & 1 \leq x < 3 \\ 0,7, & 3 \leq x < 3,5 \\ 1, & x \geq 3,5 \end{cases}$$

Енді $F(x)$ функциясының графигін тұрғызайық.



Мысал 2. Кездейсоқ шама интегралдық функциямен берілген

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0,1, & -2 \leq x \leq -1 \\ 0,4, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0,9, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Үлестірім кестесін құрыңыз, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ табыңыз.

Шешуі: Интегралдық функцияның өрнегінен байқағанымыздай $x < -2$, болғанда $F(x)=0$, яғни -2 -нің сол жағында кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері жоқ. Ал $x < -1$ болғанда $F(x)=0,1$ бұл жағдайда кездейсоқ шаманың бір мүмкін мәні бар ол -2 , сол сияқты $x < 1$ болғанда $F(x)=0,4$, яғни 1 санының сол жағында кездейсоқ шаманың екі мүмкін мәні бар, олар -2 ; 1 .

Сондықтан $F(x)=P(x=-2)+P(x=-1)$. Мұнда $P(x=-1)=0,3$.

Ойымызды осылай жалғастыра отырып ақырында мынадай үлестірім кестесін аламыз:

	-2	-1	1	2
	0,1	0,3	0,5	0,1

$$M(X)=0,2, D(X)=1,56, \sigma(X)=1,25.$$

1 ҮЗІЛСІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

1. Математикалық үміті

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \quad (2.2.4)$$

2. Дисперсиясы

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx, \quad (2.2.5)$$

Жетілдетілген формуласы:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 \quad (2.2.6)$$

3. Орташа квадраттық ауытқуы

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad (2.2.7)$$

4. K - ретті бастапқы моменті

$$\nu_K(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^K f(x)dx \quad (2.2.8)$$

5. K - ретті орталық моменті

$$\mu_K(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^K f(x)dx \quad (2.2.9)$$

Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың мүмкін мәндері жөнінде белгілі дәрежеде информация беретін басқада сипаттамалар бар. Оларға мода, медиана, асимметрия, эксцесстер жатады.

Анықтама. Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір M_0 мәнінде $f_{\max} = f(M_0)$ теңдігі орындалса, онда M_0 кездейсоқ шаманың модасы деп аталады.

Анықтама. Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір M_D мәнінде $P(x < M_D) = P(x > M_D)$ орындалса, онда M_D кездейсоқ шаманың медианасы деп аталады.

Анықтама. Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үміті бойынша симметриядан ауытқуы, оның асимметриясы деп аталады және As деп белгілейді:

$$As = \mu_3 / \sigma^3 \quad (2.2.10)$$

Мұнда μ_3 - үшінші ретті орталық момент, σ - орташа квадраттық ауытқуы.

Егер кездейсоқ шаманың үлестірімі математикалық үміті бойынша симметриялы болса, онда $As = 0$. Егер $As > 0$, онда дифференциалдық функцияның графигі оң жаққа қарай "созыңқы" болады, ал $As < 0$, онда - сол жаққа қарай "созыңқы" болады.

Анықтама. Қалыпты үлестіріммен салыстырғанда дифференциалдық функцияның графигінің "жатыңқылық" деңгейін анықтайтын шаманы

эксцесс деп атайды және E_k арқылы белгілейді:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma_4} - 3 \quad (2.2.11)$$

Мұнда қалыпты үлестірім үшін $E_k = 0$. Егер $E_k > 0$, онда Гаусс қисығымен салыстырғанда график "көтеріңкі" болады, егер $E_k < 0$, онда график "жатыңқы" болады.

Мысал 3. Үзіліссіз кездейсоқ шама дифференциалдық функциямен берілген

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Кездейсоқ шаманың M_0, M_D, A_s, E_k -ларын табу керек.

Шешуі: 1. Моданы табу үшін $f(x)$ функциясының максимумын табамыз. Ол үшін әуелі бірінші туындыны тауып оны нөлге теңеп, сосын кризистік нүкте тауып $f(x)$ -тің максимумын белгілі схема бойынша анықтаймыз:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos x, \quad f''(x) = -\frac{1}{2} \sin x, \quad f'(x) = 0, \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Мұнда $[0; \pi]$ кесіндісінде тек $x = \frac{\pi}{2}$ мәні жатады. Енді

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0. \text{ Осыдан } f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right). \text{ Олай болса } M_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Енді медиананы табалық. Анықтамадан

$$P(0 < X < M_D) = P(M_D < x < \pi)$$

Осыдан

$$P(0 < X < M_D) = \int_0^{M_D} \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{2} (\cos M_D - \cos 0) = -\frac{1}{2} \cos M_D + \frac{1}{2}$$

Сондай-ақ,

$$P(M_D < x < \pi) = \int_{M_D}^{\pi} \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos M_D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos M_D$$

$$\text{Осыдан } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos M_D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos M_D, \quad M_D = \frac{\pi}{2}$$

Енді A_s және E_k -ларды табу үшін әуелі

$$\nu_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \nu_2 = \frac{\pi^2 - 4}{2}, \quad \nu_3 = \frac{\pi^3}{3} - 3\pi, \quad \nu_4 = \frac{\pi^4}{2} - 6\pi^2 + 24$$

табамыз.

Сонда

$$\mu_2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_4 = \frac{\pi^4 + 384 - 48\pi^2}{16}$$

Осы есептеулерді пайдаланып $As=0$ екенін көреміз, яғни $f(x)$ функциясының графигі өзінің $M(x)$ -і бойынша симметриялы орналасқан.

$$E_k = \frac{192 - 2\pi^4 - 32\pi^2}{(\pi^2 - 8)^2} < 0$$

Сол сияқты

екенін көреміз, яғни $f(x)$ -тің графигі Гаусс кысығына карағанда "жатыңқы" болады екен.

Мысал 4. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{2x}{9}, & 0 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Интегралдық функциясын таба'ыз.

Шешуі: Дифференциалдық функцияның төртінші қасиеті бойынша

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Осыдан $x \leq 0$ болғанда $f(x)=0$ болатынын пайдаланып

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$$

Енді $0 < x \leq 3$ болғанда $f(x) = \frac{2x}{9}$ сондықтан

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \frac{2x}{9} dx = \frac{x^2}{9}$$

Ақырында $x > 3$ болғанда $f(x)=0$ осыдан

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^3 \frac{2x}{9} dx + \int_3^x 0 dx = 1$$

Сонымен

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Мысал 5. Үзіліссіз кездейсоқ шама үлестірім функциясымен берілген

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

1 Үлестірім тығыздығын табу керек

2 $M(x)$, $D(x)$ табу керек

3 Мына интервалдан $[\frac{1}{2}, 1]$ мән қабылдауының ықтималдығын табу керек.

Шешуі:

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1/4, & 0 < x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

$$2. M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \frac{1}{4} \int_0^4 xdx + \int_4^{+\infty} 0dx = 2$$

$$D(X) = \int_0^4 x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 = \frac{4}{3}$$

$$3. P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = F(1) - F(1/2) = \frac{1}{8}$$

Мысал 6. Кездейсоқ шама дифференциалдық функция арқылы берілген

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x, & x \in [0, \pi/2] \\ 0, & x \notin [0, \pi/2] \end{cases}$$

Табу керек: a , $F(x)$, $M(x)$, $D(x)$, $P(0 < x < \pi/4)$

Шешуі: a коэффициентін табу үшін дифференциалдық функцияның қасиетін пайдаланамыз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Есептің шарты бойынша

$$1 = \int_0^{\pi/2} a \sin x dx = -a \cos x \Big|_0^{\pi/2} = a$$

Сонымен $a=1$

Енді $F(x)$ - ті табалық:

$$x < 0 \text{ болса} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx = 0$$

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ болса

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x \sin x dx = 1 - \cos x,$$

$x \geq \frac{\pi}{2}$ болса $F(x) = 1,$

Сонымен

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$$

Математикалық үмітті мына формула көмегімен есептейміз

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = (-x \cos x + \sin x)|_0^{\pi/2} = 1$$

Енді дисперсияны есептейміз

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx - 1 =$$

$$= [-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x]|_0^{\pi/2} - 1 = \pi - 3$$

Енді $P(0 < X < \frac{\pi}{4})$ табалық. Ол үшін

$$P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \int_0^{\pi/4} f(x)dx = \int_0^{\pi/4} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2};$$

яғни $P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

Бұл ықтималдықты сондай-ақ интегралдық функцияны пайдаланып та табуға болатынын көрсетелік:

$$P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = (1 - \cos \frac{\pi}{4}) - (1 - \cos 0) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

Мысал 7. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ axe^{-kx}, & 0 < x < \infty, k > 0 \end{cases}$$

Табу керек;

- 1 Коэффициент a -ны;
- 2 Үлестірім функциясын;
- 3 $[0; 1/2]$ аралықтан мән қабылдау ықтималдығын.

Шешуі: 1. Коэффициент a -ны табу үшін үлестірім тығыздығының екіншісі қасиетін пайдаланамыз, яғни

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = 1$$

немесе

$$1 = \int_0^{\infty} xe^{-kx} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ e^{-kx} dx = dv \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{k} e^{-kx} \end{array} \right| = a \left\{ -\frac{x}{k} e^{-kx} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-kx} dx \right\} = \frac{a}{k^2}$$

яғни $\frac{a}{k^2} = 1, \quad a = k^2$

Сонда $f(x) = k^2 x e^{-kx}, \quad x > 0$

2. Бұл жерде үлестірім тығыздығының төртінші қасиетін пайдаланамыз. Сонда

$$F(x) = \kappa^2 \int_0^x x e^{-\kappa x} dx = \kappa^2 \left[-\frac{x}{\kappa} - \frac{1}{\kappa^2} \right] e^{-\kappa x} \Big|_0^x = 1 - (\kappa x + 1)e^{-\kappa x}, \quad x > 0$$

$$3. P(0 < x < \frac{1}{\kappa}) = F(\frac{1}{\kappa}) - F(0) = 1 - 2e^{-1}.$$

КЕЙБІР ҮЛЕСТІРІМ ЗАҢДАРЫ

1. Бірқалыпты үлестірім заңы

Анықтама. Егер X - кездейсоқ шамасы $[a, b]$ аралығында мән қабылдаса және оның үлестірім тығыздығы:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases} \quad (2.2.12)$$

теңдігі арқылы анықталса, онда ол кездейсоқ шама бірқалыпты үлестірім заңымен берілген дейді.

Бұл үлестірім заңдылығы үшін

$$M(x) = \frac{a+b}{2}, \quad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2.2.13)$$

Интегралдық функциясы

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Берілген аралықтан $[c; d]$ мән қабылдау ықтималдығы

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}; \quad (2.2.15)$$

Мысал 8. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Интегралдық функцияны табыңыз. $M(x)$, $D(x)$ - тарды есептеңіз.

Шешуі: Есептің шарты бойынша $[0; 1]$ аралығында $f(x)=1$ яғни тұрақты. Сондықтан бұл кездейсоқ шама бірқалыпты үлестірім заңымен берілген. Мұнда $a=0$, $b=1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Олай болса

$$M(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}, \quad D(x) = \frac{1}{12}; \quad A_s = 0, \quad E_k = -1,2$$

Мысал 9. Автобустың аялдамаға келу интервалы 10 мин. Кездейсоқ шама - автобусты күту уақыты. Осы кездейсоқ шаманың дифференциалдық және интегралдық функцияларын жазыңыз.

Шешуі: Есептің шарты бойынша $a=0$, $b=10$. Сондықтан,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,1, & 0 < x \leq 10 \\ 0, & x > 10 \end{cases}$$

Енді интегралдық функцияны табалық:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{10}, & 0 < x \leq 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$

2. Көрсеткіштік үлестірім заңы

Анықтама. Егер X -кездейсоқ шамасы мына үлестірім тығыздығы

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.2.16)$$

арқылы берілсе, онда ол көрсеткіштік үлестірім заңымен берілген дейді. Интегралдық функциясы

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Бұл үлестірімнің сандық сипаттамалары:

$$M(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(x) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad A_s = 2, \quad E_k = 9 \quad (2.2.18)$$

Кездейсоқ шаманың $[a, b]$ аралығынан мән қабылдау ықтималдығы

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad (2.2.19)$$

Мысал 10. Кездейсоқ шама интегралдық функциясы арқылы берілген

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-7x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Математикалық үмітті, дисперсияны табыңыз.

Шешуі: Әуелі ықтималдық тығыздығын табамыз

$$f(x) = \begin{cases} 7e^{-7x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Бұдан } M(x) = \frac{1}{7}, \quad D(x) = \frac{1}{49}, \quad \sigma(x) = \frac{1}{7}$$

3. Қалыпты үлестірім заңы

Анықтама. Егер X - кездейсоқ шамасы мына үлестірім тығыздығы

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

(2.2.20)

арқылы берілсе, онда ол қалыпты үлестірім заңымен берілген дейді.

Мұнда $M(x)=a$, $D(x)=\sigma^2$, $A_S=0$, $E_K=0$ (2.2.21)

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \quad (2.2.22)$$

Сондай-ақ

қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шаманың берілген интервалдан мән қабылдауының ықтималдығы, $\Phi(x)$ - Лаплас функциясы. Мына формула

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \quad (2.2.23)$$

кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы δ - дан кіші болуының ықтималдығын анықтайды.

Егер формулада $\delta=3\sigma$ болса, онда

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3)$$

немесе

$$P(|X - a| < 3\sigma) \approx 0,9973,$$

яғни кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы 3σ - дан аспауының ықтималдығы бірге өте жақын екенін көрсетеді.

Осыдан үш сигма ережесі шығады:

Егер кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілсе, онда оның математикалық үміттен ауытқуының абсолют шамасы үш орташа квадраттық ауытқудан аспайды.

Мысал 11. Станок-автомат ұзындығы 125 мм деталдар дайындайды. Олардың берілген ұзындықтан ауытқуы 0,5 мм аспайды. Дайындалған деталдардың 7 проценті сапасыз. Деталь ұзындықтарын кездейсоқ шама ретінде қарастырып және оны қалыпты үлестірім арқылы берілген деп оның дисперсиясын табу керек.

Шешуі: X -кездейсоқ шама-деталдар ұзындығы. Есептің шарты бойынша деталдардың орташа ұзындығы 125 мм, олай болса $M(x)=a=125$ мм. Сондай-ақ дайындау кезінде $124,5 < x < 125,5$. Себебі берілген ұзындықтан ауытқу 0,5 мм аспайды. Сондықтан $\alpha=124,5$, $\beta=125,5$, $\sigma=?$ Енді (2.2.23) формуласын пайдаланайық.

$$P(124,5 < x < 125,5) = 2\Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right)$$

Есептің шарты бойынша 7 процент деталдар сапасыз. Олай болса

$$P(124,5 < x < 125,5) = 0,93 \cdot 2\Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right) = 0,93$$

яғни 0,93 ықтималдықпен сапалы деталдар дайындалады.

$\Phi(x)$ - функциясының кестесінен

$$2\Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right) = 0,93 \quad \text{тендігінен} \quad \frac{0,5}{\sigma} = 1,81 \quad \text{аламыз.}$$

Осыдан $\sigma^2 = D(x) = 0,078$

Мысал 12. Кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілген және $M(x)=30$, $D(x)=4$. Мына теңсіздіктің $|x-30| < \delta$ ықтималдығы 0,8-ге тең болғанда δ қандай болу керек?

Шешуі: Есептің шарты бойынша

$$P(|X - 30| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0,8$$

Осыдан
$$\Phi\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0,4$$

Кестеден
$$\frac{\delta}{2} = 1,28, \quad \delta = 2,56$$

§3. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖҮЙЕЛЕРІ

(Кездейсоқ векторлар)

Бір элементарлық кеңістікте X_1, X_2, \dots, X_n кездейсоқ шамалар анықталған болсын. Сонда X_1, X_2, \dots, X_n кездейсоқ шамалар системасы деп аталады, ал $Z(X_1, X_2, \dots, X_n)$ кездейсоқ вектор деп аталады, мұндағы X_1, X_2, \dots, X_n оның координаталары болады.

Бір өлшемді кездейсоқ шамаларға қатысты негізгі түсініктер мен анықтамалар көп өлшемді кездейсоқ шамалар үшін де сақталады.

Екі өлшемді үзіліссіз кездейсоқ шамалар үлестірім функциясы немесе дифференциалдық үлестірім функциясы арқылы анықталады.

Үлестірім функциясы $X < x$ және $Y < y$ теңсіздіктерінің бірізгілікте орындалуының ықтималдығы ретінде анықталады:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) \quad (2.3.1)$$

Негізгі қасиеттері:

1. $0 \leq F(x,y) \leq 1$

2. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$

3. $F(\infty, y) = F_2(y)$

4. $F(x, \infty) = F_1(x)$

5. $P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар үшін

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy \tag{2.3.2}$$

Мұнда $f(x, y)$ - дифференциалдық үлестірім функциясы

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$$

Ал дискретті кездейсоқ шамалар үшін

$$F(x,y) = \sum_{x < x_i, y < y_i} P(X = x_i, Y = y_i) \tag{2.3.3}$$

Егер $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$, $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$,

болса, онда X және Y тәуелсіз кездейсоқ шамалар деп аталады, дискретті кездейсоқ шамалар үшін тәуелсіздік шарты

$$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_i)$$

Екі өлшемді дискретті кездейсоқ шамалар кесте арқылы беріледі

1 кесте

Y X	Y ₁	Y ₂	...	Y _j	...	Y _n	P _x
x ₁	P ₁₁	P ₁₂	...	P _{1j}	...	P _{1n}	P _{x1}
x ₂	P ₂₁	P ₂₂	...	P _{2j}	...	P _{2n}	P _{x2}
⋮
x _i	P _{i1}	P _{i2}	...	P _{ij}	...	P _{in}	P _{xi}
⋮
x _m	P _{m1}	P _{m2}	...	P _{mj}	...	P _{mn}	P _{xm}
P _y	P _{y1}	P _{y2}	...	P _{yj}	...	P _{yn}	1

Осы кестеден X және Y функцияларының үлестірім кестелері былай жазылады:

2 кесте

X	x ₁	x ₂	...	x _i	...	x _m
P _x	P _{x1}	P _{x2}	...	P _{xi}	...	P _{xm}
Y	y ₁	y ₂	...	y _j	...	y _n
P _y	P _{y1}	P _{y2}	...	P _{yj}	...	P _{yn}

Сондай-ақ, шартты ықтималдықтар төмендегі түрде анықталады

$$P_i(x_i / y_j) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P_{y_j}}, i = \overline{1, m}$$

$$P_j(y_j / x_i) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P_{x_i}}, j = \overline{1, n}$$

Сандық сипаттамалары

$$M(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i p_{ij}, \quad M(y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j p_{ij},$$

$$D(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - M(x))^2 p_{ij}, \quad D(y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_j - M(y))^2 p_{ij}$$

Сондай ақ екі өлшемді кездейсоқ шамалар үшін ковариация, корреляция коэффициенттерінің маңызы зор:

$$\text{cov}(x, y) = M\{[x - M(x)][y - M(y)]\},$$

$$r(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{D(x)D(y)}};$$

Осында, егер X және Y тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, $r(x, y) = 0$ болады.

Шартты математикалық үміттер:

$$M(Y / X = x) = \sum_{j=1}^n y_j P(y_j / x),$$

$$M(X / Y = y) = \sum_{i=1}^m x_i P(x_i / y);$$

Мысал 1. Техникалық бақылау бөлімі шығарылған бөлшектердің стандарттылығын тексереді. Негізгі тексерілетін параметрлер, олардың ұзындығы мен ені. Сонда X - детальдің енінің стандарттан ауытқуы, Y - ұзындығының стандарттан ауытқуы. Кездейсоқ шамалар кестемен берілген

Y	-1	0	1	2 кесте P _X
X				
-2	0,21	0,17	0,32	0,7
3	0,12	0,07	0,11	0,3
P _Y	0,33	0,24	0,43	1.00

1 X және Y кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдарын жазыңыз.

2 а) X -тің $Y=y_3$ болғандағы шартты үлестірім заңын жазыңыз;

б) Y -тің $X=x_2$ болғандағы шартты үлестірім заңын жазыңыз;

3 X пен Y өзара тәуелсіз бе?

4 Үлестірім функциясын $F(x, y)$ табыңыз:

Бір өлшемді X және Y кездейсоқ шамалардың үлестірім $F_1(x)$ және $F_2(y)$ функцияларын жазыңыз.

5 Корреляциялық коэффициентті табыңыз.

6 Шартты математикалық үміттерін табыңыз.

Шешуі: 1. кестеден X және Y кездейсоқ шамаларының үлестірім заңдары төмендегідей түрде жазылды

3 кесте

X	-2	3
P _X	0,7	0,3

Y	-1	0	1
P _Y	0,33	0,24	0,43

2. а) X - тің Y=y₃ болғандағы шартты үлестірім заңын жазу үшін әуелі

$P(x_1 / Y = y_3)$, $P(x_2 / Y = y_3)$ - терді табамыз:

$$P(x_1 / Y = y_3) = \frac{P(X = x_1, Y = y_3)}{P_{y_3}} = \frac{0,32}{0,43} = \frac{32}{43}$$

$$P(x_2 / Y = y_3) = \frac{P(X = x_2, Y = y_3)}{P_{y_3}} = \frac{0,11}{0,43} = \frac{11}{43}$$

Сонда мына үлестірім заңын аламыз:

4 кесте

X	-2	3
P(X/Y=y ₃)	<u>$\frac{32}{43}$</u>	<u>$\frac{11}{43}$</u>

б) Y - тің X=x₂ болғандағы шартты үлестірім заңын осылай есептесек:

5 кесте

Y	-1	0	1
P(Y/X=x ₂)	<u>$\frac{12}{30}$</u>	<u>$\frac{7}{30}$</u>	<u>$\frac{11}{30}$</u>

3 X және Y тәуелсіз бе?

Екі X және Y кездейсоқ шамалардың өзара тәуелсіздігін анықтау үшін олардың сәйкес шартты және шартсыз үлестірім заңдарын салыстыру керек. Егер ол заңдар бірдей кестелермен берілсе, онда олар тәуелсіз болғаны, ал егер ол кестелер бірдей болмаса, онда олар тәуелді болғаны. Сондықтан біз N 2; N 4 және N 3; N 5 кестелерді өзара салыстырсақ, олардың бірдей еместігін байқаймыз, олай болса X және Y өзара тәуелді кездейсоқ шамалар болады.

4 Үлестірім функциясын (2.3.3) формуланы пайдаланып жазамыз

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, y \leq -1 \\ 0,21, & x \leq 3, y \leq 0 \\ 0,38, & x \leq 3, y \leq 1 \\ 0,70, & x \leq 3, y > 1 \\ 0,82, & x > 3, y \leq 0 \\ 0,89, & x > 3, y \leq 1 \\ 1, & x > 3, y > 3 \end{cases}$$

Енді $F_1(x)$ және $F_2(y)$ функцияларын 2 кесте мен 3 кестені пайдаланып табамыз:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ 0,7, & -2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} \quad F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -1 \\ 0,33, & -1 < y \leq 0 \\ 0,57, & 0 < y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

5. Корреляциялық коэффициентті табалық

$$\text{cov}(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - M(x))(y_j - M(y))P_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j P_{ij} - M(x)M(y)$$

формуласын пайдаланып табалық.

Әуелі $M(x)$ және $M(y)$ - терді 2 - 3 кестелерді пайдаланып табамыз.

$$M(x) = -2 \cdot 0,7 + 3 \cdot 0,3 = -0,5, \quad D(x) = 5,25, \quad \sigma_x = 2,29$$

$$M(y) = -1 \cdot 0,33 + 0 \cdot 0,24 + 1 \cdot 0,43 = 0,1, \quad D(y) = 0,87, \quad \sigma_y = 0,866$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 x_i y_j p_{ij} = -2(-1 \cdot 0,21 + 1 \cdot 0,32) + 3(-1 \cdot 0,12 + 1 \cdot 0,11) = -0,22 - 0,03 = -0,25$$

Сонда

$$\text{cov}(x, y) = -0,25 - (-0,5 \cdot 0,1) = -0,2, \quad r_{xy} = \frac{-0,2}{2,29 \cdot 0,87} = -0,1$$

Осыдан $r_{xy} \neq 0$ екенін көреміз, яғни X және Y өзара тәуелді кездейсоқ шамалар болады.

6. Айталық $M(X/Y=y_3)$ және $M(Y/X=x_2)$ табу керек болсын. Оларды табу үшін 4- 5 кестелерді пайдаланамыз. Сонда

$$M(X/Y=y_3) = -2 \cdot \frac{32}{43} + 3 \cdot \frac{11}{43} = -\frac{31}{43}$$

$$M(Y/X=x_2) = -1 \cdot \frac{12}{30} + 0 \cdot \frac{11}{43} + 1 \cdot \frac{11}{30} = \frac{1}{30}$$

§4. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ФУНКЦИЯСЫ

Кездейсоқ шамалар x_1, x_2, \dots, x_n системасын қарастыралық. Олардың әрқайсысының үлестірім заңдары белгілі болсын. Сонда кездейсоқ шамалар функциясы мына түрде беріледі

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.4.1)$$

Осы кездейсоқ шама y - тің үлестірім заңын табу керек. Бір кездейсоқ

шаманың функциясын қарастыралық:

$$y = \varphi(x) \tag{2.4.2}$$

Мұнда X дискретті немесе үзіліссіз кездейсоқ шама болуы мүмкін.

1. X - дискретті кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген.

Сонда y - кездейсоқ шаманың үлестірім заңы.

y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$...	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	...	p_n

Мысал 3. Екі мерген бір-бірінен тәуелсіз нысанаға сәйкес 2 және 3 атыс жасайды. Біріншісінің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,9, ал екіншісінікі - 0,8. X, Y - бірінші және екінші мергеннің нысанаға тигізулерінің сандары. $Z = X + Y$, $Z = X \cdot Y$ кездейсоқ шамалардың үлестірім кестесін жазыңыз. $M(X + Y)$, $M(X \cdot Y)$ - терді табыңыз.

Шешуі: X және Y кездейсоқ шамалар биномдық үлестірім заңымен берілген. Сондықтан Бернулли формуласын пайдаланып

X	0	1	2	Y	0	1	2	3
P	0,01	0,18	0,81	P_y	0,08	0,096	0,384	0,512

үлестірім кестелерін аламыз.

Енді $Z = X + Y$, $Z = X \cdot Y$ кездейсоқ шамаларының мүмкін мәндерін $x_i + y_j$ және $x_i \cdot y_j$ табалық. Олардың ықтималдықтары $P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ арқылы есептеледі. Енді $x_i + y_j$ және $x_i \cdot y_j$ мүмкін мәндерін есептелік.

$x_i + y_j$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_1 + y_3$	$x_1 + y_4$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$	$x_2 + y_3$	$x_2 + y_4$
$x_i y_j$	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_1 y_3$	$x_1 y_4$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$	$x_2 y_3$	$x_2 y_4$
P	$p_1 q_1$	$p_1 q_2$	$p_1 q_3$	$p_1 q_4$	$p_2 q_1$	$p_2 q_2$	$p_2 q_3$	$p_2 q_4$

Осыдан

x+y	0	1	2	3	4	5
P	0,0008	0,0024	0,0276	0,152	0,4032	0,41472

xy	0	1	2	3	4	6
P	0,01792	0,01728	0,14688	0,09216	0,31104	0,41472

үлестірім заңдарын аламыз.

Сондай-ақ $M(x+y) = 4,2$ $M(x \cdot y) = 4,32006$

§5. ҮЛКЕН САНДАР ЗАҢЫ

Үлкен сандар заңы бірнеше теоремалар арқылы беріледі. Бұл теоремаларда (С.Чебышев, Бернулли; Пуассон теоремалары) өте көп кездейсоқ факторлардың жиынтық әсері кездейсоқтықтан тәуелсіз нәтижелер алудың шарттары беріледі.

1 Чебышев теңсіздігі

Егер X кездейсоқ шамасының дисперсиясы бар болса, онда мына

теңсіздіктер орындалады:

$$P(|X - M(x)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(x)}{\varepsilon^2} \quad (2.5.1)$$

$$P(|X - M(x)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2} \quad (2.5.2)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$.

Бұл теңсіздіктер кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуын бағалайды.

Мысал 1. Дискретті кездейсоқ шама үлестірім заңымен берілген

	-1	0	2	4	6
	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

1. Мына теңсіздіктің $|x - M(x)| < 5$ орындалуының ықтималдығын табыңыз.
2. Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|x - M(x)| < 5$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Әуелі математикалық үміт, дисперсиясын табалық.

$$M(x) = -0,2 + 0,6 + 0,2 + 0,3 = 0,9$$

Енді дисперсия табу үшін X^2 - тың үлестірім заңын жазамыз:

X^2	1	0	4	16	36
P	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Сонда

$$M(x^2) = 0,2 + 1,2 + 0,8 + 1,8 = 4$$

$$D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = 4 - 0,81 = 3,19$$

1. Енді $|x - 0,9| < 5$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын табу үшін осы теңсіздікті қанағатандыратын X -тің мәндерін анықтау қажет. Берілген үлестірім кестесімен бұл теңсіздікті кездейсоқ шаманың $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ мәндері қанағаттандыратынына көз жеткізуге болады. Олай болса

$$P(|X - 0,9| < 5) = P(x = -1) + P(x = 0) + P(x = 2) + P(x = 4) =$$

$$0,2 + 0,4 + 0,3 + 0,05 = 0,95$$

Сонымен

$$P(|X - 0,9| < 5) = 0,95$$

2. Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|x - 0,9| < 5$ теңсіздігінің орындалуын бағалайық:

$$P(|X - 0,9| < 5) \geq 1 - \frac{3,19}{25} = 0,8725$$

яғни

$$P(|X - 0,9| < 5) \geq 0,8725$$

Сөйтіп Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|x - M(x)| \leq 5$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын төменнен бағаладық, яғни $|x - 0,9| \leq 5$ теңсіздігі кем дегенде 0,8724 ықтималдықпен орындалады. Бұл тұжырымның

құндылығы есептер шығарған кезде $|x-M(x)| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) теңсіздігінің орындалуының дәл ықтималдығын табу мүмкін болмаған жағдайларда оның ықтималдығын төменнен бағалауға мүмкіндік береді.

Мысал 2. Жарық беруші торға 20 электрошам параллель қосылған. Т уақыт ішінде әрбір шамның жарық беру ықтималдығы 0,8. Чебышев теңсіздігін пайдаланып Т уақытында жарық беруші барлық электрошамдармен, жарық беріп тұрған шамдардың арифметикалық орташа мәндерінің (математикалық үміті) айырмасының абсолюттік шамасының ықтималдығын бағалаңыз. Егер айтылған айырма: 1) төрттен кіші болса; 2) төрттен кем болмаса.

Шешуі: Белгілі бір Т уақытында жарық беріп тұрған электрошамдардың саны кездейсоқ шама. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген. Есептің шарты бойынша $n=20$, $p=0,8$, $q=0,2$.

Сондықтан

$$M(x) = 20 \cdot 0,8 = 16, \quad D(x) = 16 \cdot 0,2 = 3,2$$

Енді Чебышев теңсіздігін пайдаланамыз

$$1 \quad P(|X - 0,9| < 4) \geq 1 - \frac{3,2}{16} = 0,8$$

$$2 \quad P(|X - 0,9| \geq 4) \leq \frac{3,2}{16} = 0,2$$

Сонымен

$$P(|X - 16| < 4) \geq 0,8 \quad P(|X - 16| \geq 4) \leq 0,2$$

Мысал 3. Зауыт өнімдерінің 75 процентін жоғарғы сортпен шығарады. Шығарылған 100000 бұйымдардың ішінде жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдардың саны осы жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдардың математикалық үмітінен айырмасының абсолют шамасы 1000 данадан артық болмауының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдар саны кездейсоқ шама. Оны X арқылы белгілейік. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестіріммен берілген. $M(x)$ осы кездейсоқ шаманың математикалық үміті. Есептің шарты бойынша $n=100000$, $P=0,75$, $q=0,25$.

Сонда

$$M(x) = 100000 \cdot 0,75 = 75000, \quad D(x) = 18750$$

Осыдан

$$P(|X - M(x)| < 1000) \geq 1 - \frac{18750}{10^6} = 0,98125$$

яғни

$$P(|X - M(x)| < 1000) \geq 0,98125$$

ЖАТТЫҒУ Е С Е П Т Е Р І

1. Екі атқыш нысанаға бір-бірден атыс жасады. Нысанаға тигізу ықтималдығы бірінші атқыш үшін 0,6 ал екіншісінікі - 0,8. Кездейсоқ

шама X -нысанаға тигізудің саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім кестесін құрыңыз.

2. Нысанаға тигізу ықтималдығы $2/3$ тең. Үш атыс жасағанда нысанаға тию санының үлестірім кестесін құрыңыз.

III Бөлім. МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Негізгі ұғымдар, таңдамалық тәсіл

Математикалық статистикада дискретті немесе үзіліссіз сандық сипатты белгі X , яғни, осы белгінің мүмкін мәндерінен тұратын бас жинақ зерттелінеді. Оның бас орташа, бас дисперсия т.с.с. сандық сипаттамаларын табу мәселесі практикалық қажеттіліктен туындайды.

Алайда, көп жағдайда бас жинақты толық анықтау мүмкін емес, немесе оны анықтау көп жағдайда тиімсіз болады. Сондықтан, осы бас жинақтан варианттар деп аталынатын x_1, x_2, \dots, x_k элементтерінен тұратын жиынша кездейсоқ теріліп алынады. Бұл жиыншада x_1 варианты n_1 рет, x_2 варианты n_2 рет, т.т., x_k варианты n_k рет қайталануы мүмкін. Онда осы жиыншаны былай жазып

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

вариациялық қатар түрінде жазылған таңдама дейміз.

Мұндағы n_i - x_i вариантының жиілігі деп, ал $n = \sum_{i=1}^k n_i$ таңдаманың көлемі деп аталады.

Енді осы таңдаманың сандық сипаттамалары арқылы бас жинақты зерттеуге болады. Осы таңдамалық тәсіл - математикалық статистиканың негізгі тәсілі болып табылады.

§1. ТАҢДАМАНЫҢ СИПАТТАМАЛАРЫ

а) Эмпирикалық функция

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \quad (3.1.1)$$

Мұнда n_x X -тан кіші болатын варианттардың жиіліктерінің қосындысы. таңдаманың көлемі үлкен болғанда, осы функция арқылы бас жинақтың белгісіз интегралдық үлестірім функциясы $F(x)$ -ты жуықтап табуға болады.

б) Жиіліктер полигоны.

Жазықтықтағы координаталары $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ нүктелерін қосатын кесінділерден тұратын қисық сызық полигон деп аталады.

в) таңдамалық орташа

$$\bar{X}_T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}$$

(3.1.2)

г) таңдамалық дисперсия

$$D_T = \frac{\sum n_i(x_i - x_T)^2}{n} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - (x_T)^2 \quad (3.1.3)$$

д) таңдамалық орташа квадраттық ауытқу.

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \quad (3.1.4)$$

е) k -шы ретті бастапқы эмпирикалық момент

$$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (3.1.5)$$

ж) k -шы ретті орталық эмпирикалық момент

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - x_T)^k}{n}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (3.1.6)$$

з) таңдамалық асимметрия

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_T^3} \quad (3.1.7)$$

и) таңдамалық эксцесс

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3 \quad (3.1.8)$$

Ескерту 1. Егер X_i варианттары үлкен сандар болса, жоғарыдағы (3.1.3) формулаларын тікелей пайдаланбай, $u_i = x_i - c$ деген шартты варианттарға көшіп, мына формулаларды пайдаланған ыңғайлы болады

$$\bar{X}_T = \frac{\sum n_i u_i}{n} + c \quad (3.1.9)$$

$$D_T(x) = D_T(u) = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_i u_i}{n} \right)^2 \quad (3.1.10)$$

Мұндағы c - "жалған нөл" деп аталынатын сан, оны өзіміз жиілігі ең үлкен варианттарына шамалас етіп таңдаймыз.

Мысал 1. таңдама мына вариациялық қатар түрінде берілген:

x_i	1	4	5
n_i	4	4	2

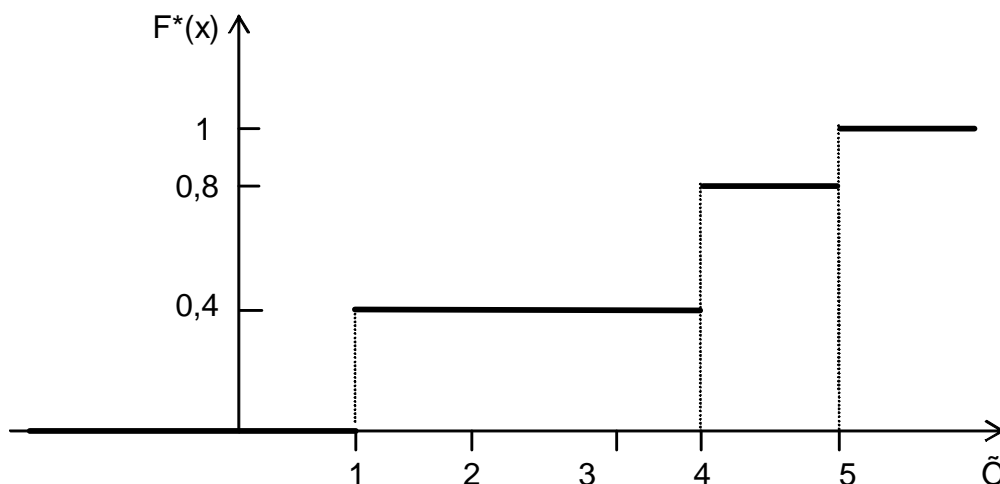
Барлық сипаттамаларын табыңыз.

Шешуі: x_i варианттары кішкене сандар болғандықтан (3.1.1) - (3.1.8) формулаларын тікелей қолданамыз.

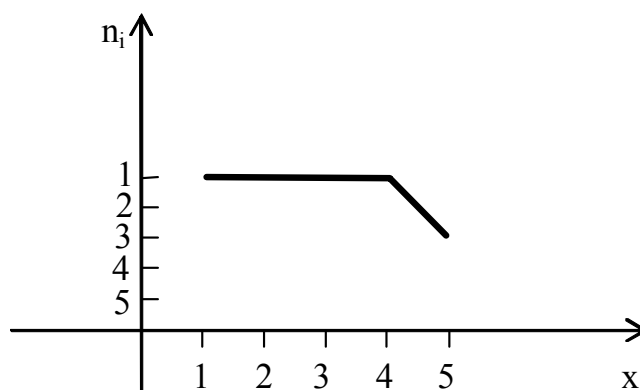
а) таңдаманың көлемі $n=10$ және $x \leq 1$ болса $n_x=0$ (1-ден кіші варианттар жоқ), демек $F^*(x)=0$, ал $x < 4$ болса $n_x = 4$, $F^*(x)=0,4$, т.с.с. есептеулер жүргізіп мына функцияны табамыз.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } -\infty < x \leq 1 \\ 0,4, & \text{егер } 1 < x \leq 4 \\ 0,8, & \text{егер } 4 < x \leq 5 \\ 1, & \text{егер } 5 < x < +\infty \end{cases}$$

Осы функцияның графигі төмендегідей болғандықтан, эмпирикалық функцияны баспалдақ тәріздес функция деп атау орынды.



б) Жиіліктер полигоны төмендегідей қисық болады.



в) $\bar{x}_T = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{10} = 3$

г) $D_T = \frac{4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2}{10} - 9 = 2,8$

д) $\sigma_T = \sqrt{2,8} \approx 1,67$

е) $M_1 = \bar{x}_T, M_2 = \frac{4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2}{10} = 11,8$

ж) $m_1 = 0, m_2 = D_T$

$$m_3 = \frac{4 \cdot (1-3)^3 + 4 \cdot (4-3)^3 + 2 \cdot (5-3)^3}{10} = -1,2$$

$$m_4 = \frac{4 \cdot (1-3)^4 + 4 \cdot (4-3)^4 + 2 \cdot (5-3)^4}{10} = 1,0$$

$$3) a_s = -\frac{1,2}{(1,67)^3} = -0,26$$

$$и) e_k = \frac{10}{7,84} - 3 = -1,72$$

Мысал 2. Берілген вариациялық қатар арқылы x_T мен D_T -ны табыңыз.

x_i	3860	3900	3910	3913
n_i	2	13	4	1

Шешуі: Варианталар үлкен сандар, сондықтан $C=3900$ деп алып, $U_i=X_i-C$ шартты варианттарға көшейік, яғни шартты вариациялық қатар аламыз.

U_i	-40	0	10	13
n_i	2	13	4	1

Сонда (3.1.9), (3.1.10) формулаларын пайдалансақ

$$x_T = \frac{2 \cdot (-40) + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 13}{20} + 3900 = 3898,65$$

$$D_T = \frac{2 \cdot 1600 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 169}{20} - \left(\frac{-80 + 40 + 13}{20} \right)^2 = 186,63$$

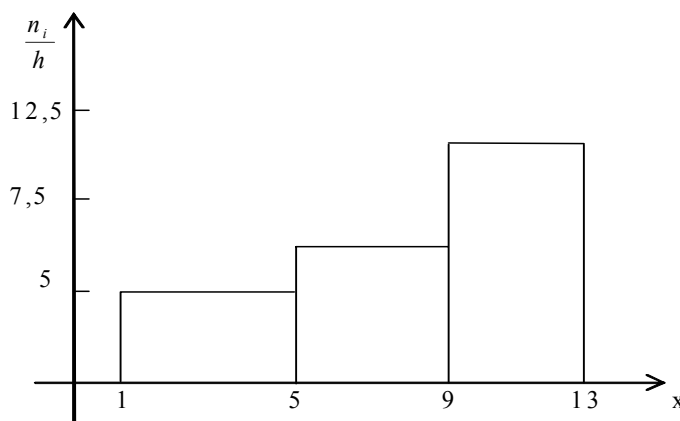
Ескерту 2. Егер сандық сипатты белгі X үзіліссіз таралған болса, оның бақыланған мәндері кіретін интервалды ұзындықтары h болатындай бірнеше кіші интервалдарға бөліп, әрбір бөлікте жататын варианттардың жиіліктерінің қосындысы n_i анықталады. Сонда табаны $(x_i; x_{i+1})$ кіші интервал, ал биіктігі $\frac{n_i}{h}$ болатын тіктөртбұрыштардан құралған фигураны - гистограмма дейміз.

Мысал 3. Мына таңдаманың гистограммасын құрыңыз.

Интервал нөмірі	Кіші интервалдар	Варианталардың жиіліктерінің қосындысы	Жиіліктер тығыздығы
i	$(x_i ; x_{i+1})$	n_i	n_i/h
1	(1 ; 5)	20	5
2	(5; 9)	30	7,5
3	(9; 13)	50	12,5

Шешуі: Абциссалар осінде ұзындықтары 4 болатын берілген интервалдарды саламыз. Енді табандары осы интервалдар болатын ал

биіктіктері $\frac{n_i}{h}$ болатын тіктөртбұрыштарды саламыз.



Гисторамманың ауданы n кв.өлшем бірлігіне тең болады.

IV БӨЛІМ. ҮЛЕСТІРІМ ПАРАМЕТРЛЕРІН БАҒАЛАУ

Дискретті немесе үзіліссіз сандық сипатты белгі X -ы” үлестірімінің белгісіз параметрін Θ деп белгілейік. Оның таңдама арқылы табылатын нүктелік бағасы Θ^* болсын. Әртүрлі таңдамалар үшін өзгеріп отыратындықтан Θ^* - кездейсоқ шама болады.

Анықтама 1. Егер $M(\Theta^*) = \Theta$ болса, онда Θ^* жылжымаған баға деп аталады, ал басқа жағдайда жылжыған баға деп аталады.

Анықтама 2. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta - \theta^*| < \varepsilon) = 1$ болса, онда Θ^* орнықты баға деп аталады, бұл жерде n - таңдама көлемі.

§1. ТАҢДАМА АРҚЫЛЫ БІРДЕН ТАБЫЛАТЫН НҮКТЕЛІК БАҒАЛАР

Сөйлем 1. Бас орташаның жылжымаған және орнықты нүктелік бағасы таңдамалық орташа болады.

Сөйлем 2. Бас дисперсияның жылжыған бағасы таңдамалық дисперсия болады, ал жылжымаған бағасы түзетілген таңдамалық дисперсия s^2 болады,

мұнда $s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_T$, n - таңдама көлемі.

Мысал 1. Бас жинақтан мынадай таңдама алынған.

x_i	4	5	7
n_i	10	5	5

а) Бас орташаның жылжымаған бағасын табыңыз.

б) Бас дисперсиясының жылжымаған және жылжыған бағаларын табыңыз.

Шешуі:

а) таңдамалық орташа жылжымаған баға болады.

$$\bar{x}_T = \frac{4 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 5}{20} = 5$$

б) Жылжыған баға ретінде D_T , ал жылжымаған баға ретінде s^2 алынады

$$D_T = \frac{4^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 5 + 7^2 \cdot 5}{20} - 25 = 1,5, \quad s^2 = \frac{20}{19} \cdot 1,5 = 1,58$$

§2. МОМЕНТТЕР ӘДІСІ

Бұл әдіс бастапқы және орталық эмпирикалық моменттер өздеріне сәйкес бастапқы және орталық теориялық моменттердің орнықты бағалары болатындығына негізделген. Осы сәйкес моменттерді бір-біріне теңестіре отырып, үлестірімнің белгісіз параметрінің нүктелік бағалауларын табуға болады.

Мысал 1. Көрсеткіштік үлестірімнің $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x \geq 0)$ белгісіз параметрі λ -ның нүктелік бағасын табыңыз.

Шешуі: Бастапқы I-ші ретті эмпирикалық және теориялық моменттерді теңестіреміз.

$$v_1 = M_1$$

Көрсеткіштік үлестірімнің бірінші ретті бастапқы моменті

$$v_1 = M(x) = \frac{1}{\lambda}, \text{ ал } M_1 = \bar{x}_T \text{ болғандықтан } \frac{1}{\lambda} = \bar{x}_T \text{ теңдігін аламыз. Осыдан}$$

белгісіз параметр λ -ның нүктелік бағасы $\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}_T}$ тең.

Мысал 2. Берілген таңдама бойынша моменттер әдісін қолданып қалыпты үлестірімнің

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

белгісіз a және σ параметрлерінің нүктелік бағасын табыңыз.

Шешуі: Бұл жағдайда екі a және σ белгісіз параметр болғандықтан бірінші, екінші ретті теориялық және эмпирикалық моменттерді теңестіреміз.

$$v_1 = M_1, \quad \mu_2 = m_2.$$

Ары қарай $v_1 = M(x) = a$, $\mu_2 = D(x) = \sigma^2$ және $M_1 = \bar{x}_T$, $m_2 = D_T$ екенін ескерсек, онда мынадай нүктелік бағалар аламыз

$$a^* = \bar{x}_T, \quad \sigma^* = \sqrt{D_T}$$

Мысал 3. Берілген таңдамасының сипаттамалары арқылы моменттер әдісімен бірқалыпты үлестірімнің

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases}$$

белгісіз a және b параметрлерінің нүктелік бағаларын табыңыз.

Шешуі: Бірінші және екінші ретті эмпирикалық моменттерді теориялық моменттерге теңестірейік, яғни $\nu_1=M_1$, $\mu_2=m_2$.

Сонда $\nu_1=M(x)=\frac{a+b}{2}$, $\mu_2=D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$, $M_1=\bar{x}_T$, $m_2=D_T$ екенін ескере отырып мынадай теңдеулер системасын аламыз:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{x}_T \\ \frac{(b-a)^2}{12} = D_T \end{cases}$$

Осы системаны шеше отырып, $a^*=\bar{x}_T - \sqrt{3D_T}$, $b^*=\bar{x}_T + \sqrt{3D_T}$ нүктелік бағаларын табамыз.

§3. ИНТЕРВАЛДЫҚ БАҒАЛАР

Бір санмен ғана анықталатын нүктелік баға, таңдаманың көлемі аз болғанда, өрескел қатеге соқтыруы мүмкін, сондықтан бас жинақтың белгісіз параметрінің интервалдық бағасын, яғни осы θ параметрі жататындай (α, β) интервалын белгілі бір сенімділікпен айқындау мәселесін қарастырайық.

Анықтама 1. θ параметрінің θ^* бағасы бойынша сенімділігі (сенімділік ықтималдығы) деп $|\theta - \theta^*| < \delta$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығы γ -ны айтады, яғни $P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma$, бұл жерде δ - бағаның дәлдігі.

Анықтама 2. $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ - интервалын γ сенімділігімен алынған сенімділік интервалы деп атайды.

Сөйлем 1. Қалыпты үлестіріммен берілген сандық сипатты белгі X шаманың белгісіз a математикалық үмітін таңдамалық орташа \bar{x}_T арқылы γ сенімділігімен бағалау үшін мынадай сенімділік интервалдарын аламыз.

а) Егер σ - бас орташа квадраттық ауытқу белгілі болса, онда

$$\bar{x}_T - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(4.4.1)

t -саны $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ -ға тең болатындай сан, оны Лаплас функциясының мәндер кестесінен аламыз.

б) Егер σ - белгісіз болса, онда

$$\bar{x}_T - t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

(4.4.2)

Мұнда S - түзетілген таңдамалық орташа квадраттық ауытқу, $t_\gamma = t(\gamma, n)$ - шамасы кестеден анықталады.

Сөйлем 2. Қалыпты үлестіріммен берілген X -тың бас орташа

квадраттық ауытқуы σ -ны берілген γ сенімділігімен бағалау үшін мынадай сенімділік интервалдарын аламыз.

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \text{ егер } q < 1 \quad (4.4.3)$$

$$0 < \sigma < s(1+q), \text{ егер } q > 1 \quad (4.4.4)$$

Бұл жерде $q=q(n,\gamma)$ - кестеден алынады.

Мысал 1. Бас орташа квадраттық ауытқуы $\sigma = 5$ болатын қалыпты үлестіріммен берілген бас жинақтан алынған көлемі $n=25$ таңдамадан $\bar{x}_T=17$ табылды. Бас жинақтың белгісіз математикалық үмітін $\gamma=0,99$ сенімділігімен бағалайтын интервалын табыңыз.

Шешуі: (4.4.1) формуласын пайдаланамыз. Егер $\frac{\gamma}{2} = \Phi(t) = 0,495$, онда кестеден $t=2,57$, яғни

$$17 - 2,57 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} < a < 17 + 2,57 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}$$

Осыдан $14,43 < a < 19,57$ сенімділік интервалы.

Мысал 2. Әлдебір физикалық шама бір құралмен 10 рет өлшенеді. Өлшеулердің кездейсоқ қателерінің түзетілген орташа квадраттық ауытқуы 0,5 - ке тең. Өлшеу құралының дәлдігін $\gamma=0,99$ сенімділігімен табыңыз.

Шешуі: Құралдың дәлдігі өлшеуде жіберілген кездейсоқ қателердің бас орташа квадраттық ауытқуымен сипатталады, яғни бізге σ -ны бағалайтын сенімділік интервалын табу керек.

$\gamma=0,99$, $n=10$ болса, кестеден $q=1,08$ олай болса, (4.4.4) формуласын пайдалана отырып $0 < \sigma < 1,04$ дәлдікті анықтайтын сенімділік интервалын табамыз.

V БӨЛІМ. СТАТИСТИКАЛЫҚ БОЛЖАМДАРДЫ ТЕКСЕРУ

§1. НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР. БОЛЖАМДЫ ТЕКСЕРУДІҢ ЖАЛПЫ СХЕМАСЫ

Анықтама 1. Статистикалық болжам деп кездейсоқ шаманың үлестірімінің түрі немесе үлестірім параметрлері туралы алдын-ала жасалатын болжамды айтады. Статистикалық болжам таңдаманың көмегімен тексеріледі.

Алдымен нөлдік болжам деп аталатын, тексерілуге тиіс H_0 болжамы қарастырылады. Бұл болжамға қарсы болжамды альтернативті деп атап, H_1 әріпімен белгілейміз. Мысалы: үлестірімнің белгісіз параметрі θ туралы нөлдік болжам былай болса $H_0: \theta = \theta_0$, онда $H_1: \theta \neq \theta_0$ ($H_1: \theta > \theta_0$).

Статистикалық болжамды тексеру барысында екі түрлі қате жіберуіміз мүмкін.

Бірінші текті қате - H_0 болжамы жоққа шығарылып H_1 болжамы

қабылданады, бірақ негізінде H_0 дұрыс.

Екінші текті қате - H_0 болжамын қабылдаймыз, бірақ негізінде H_1 болжамы дұрыс.

Анықтама 2. Бірінші текті қате жіберу ықтималдығын **маңыздылық** деңгейі дейміз де, α әріпімен белгілейміз.

Болжамды тексерудің жалпы схемасы:

- 1 Үлестірімі белгілі статистикалық критерий деп аталатын F кездейсоқ шамасы енгізіледі. Бұл шаманың әртүрлі еркіндік дәрежелері болып, ал үлестірімі қалыпты, χ^2 - квадрат, Стьюдент, Фишер-Снедекор үлестірімдерімен берілуі мүмкін.
- 2 таңдамалық (эмпирикалық) белгілі деректерге сүйене отырып, критерийдің бақыланатын мәні $F_{\text{бак}}$, анықталады.
- 3 Берілген α **маңыздылық** деңгейінде F үлестірімінің сын нүктелері кестесі арқылы, критерийдің сындық мәні - $F_{\text{сын}}$ анықталады.
- 4 Егер $F_{\text{бак}} < F_{\text{сын}}$ болса, онда H_0 болжамын жоққа шығару
- 5 ға негіз жоқ, ал егер $F_{\text{бак}} > F_{\text{сын}}$ болса, онда H_0 болжамы қабылданбайды.

§2. ПИРСОННЫҢ КЕЛІСІМДІК ХИ-КВАДРАТ КРИТЕРИЙІ

Егер үлестірім заңы белгісіз болса, онда "бас жинақ A заңы бойынша үлестірілген", - деген нәлдік болжам келісімдік критерийлері арқылы тексеріледі. Олардың бірнеше түрі бар: Пирсон критерийі, Колмогоров критерийі, Смирнов критерийі т.т.

Но: "бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген" деген болжамды тексеру үшін Пирсонның келісімдік χ^2 критерийі қолданылады.

Сонымен h қадамымен біркелкі орналасқан таңдама берілсін

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_m
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_m

Енді теориялық жиіліктерді табамыз.

$$n_i^0 = \frac{nh}{\sigma_T} \cdot \varphi(u_i), i = \overline{1, m}$$

$$u_i = (x_i - \bar{x}_T) / \sigma_T, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

немесе

$$n_i^0 = np_i, \quad P_i = P(x_{i-1} < x < x_i)$$

Осыдан мына кесте анықталады:

Эмпирикалық жиіліктер	N_1	n_2	n_3	...	n_m
-----------------------	-------	-------	-------	-----	-------

Теориялық жиіліктер	n_1^0	n_2^0	n_3^0	...	n_m^0
---------------------	---------	---------	---------	-----	---------

Теориялық және эмпирикалық жиіліктердің бір-бірінен ауытқуы кездейсоқ па, бақылаулар саны аз ба, әлде "бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген" деген нөлдік болжам дұрыс емес пе? Осы сұрақтарға Пирсон критерийі жауап береді.

Тексеру схемасы:

2. Статистикалық критерий ретінде мына кездейсоқ шаманы аламыз

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0} \quad (5.2.1)$$

Бұл шама - еркіндік дәрежесі $k=s-1-r$ болатын, χ^2 - квадрат үлестірімімен таралған кездейсоқ шама. Мұнда s - таңдамадағы топтар саны, r - үлестірім параметрлерінің саны.

2. Берілген деректерге сүйене отырып, критерийдің бақыланатын мәнін анықтаймыз.

$$\chi_{\text{бак}}^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0} \quad (5.2.2)$$

3. Берілген α маңыздылық деңгейінде, χ^2 - квадрат үлестірімнің сын нүктелері кестесі арқылы $\chi_{\text{сын}}^2(\alpha; k)$ критерийдің сындық мәнін анықтаймыз.

4. Егер $\chi_{\text{бак}}^2 < \chi_{\text{сын}}^2(\alpha; k)$ - нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ, ал егер $\chi_{\text{бак}}^2 > \chi_{\text{сын}}^2(\alpha; k)$ - нөлдік болжам қабылданбайды.

Мысал. 1. Эмпирикалық және теориялық жиіліктер берілген

Эмпирикалық жиіліктер	5	13	39	75	105	83	32	14
Теориялық жиіліктер	3	15	41	80	101	77	38	13

Берілген $\alpha=0,05$ маңыздылық деңгейінде бас жинақтың қалыпты үлестірілгендігі туралы болжамды тексеріңіз.

Шешуі: Критерийдің бақыланатын мәнін анықтау үшін төмендегі кестені құрамыз.

s_i	n_i	n_i^0	$n_i - n_i^0$	$(n_i - n_i^0)^2$	$(n_i - n_i^0)^2 / n_i^0$
1	5	3	2	4	1,333
2	13	15	-2	4	0,267
3	39	41	-2	4	0,097
4	75	80	-2	25	0,3125
5	105	101	4	16	0,158
6	83	77	6	36	0,468
7	32	38	-6	36	0,947

8	14	13	1	1	0,077
					$\Sigma \approx 3,66$

Сонымен $\chi^2 = 3,66$, ал критерийдің еркіндік дәрежесі $k=s-1-r=5$, себебі $s = 8, r = 2$ (қалыпты үлестірім екі параметр арқылы анықталады). Онда кестеден $\chi^2_{0,05; 5} = 11,1$. Сонымен $\chi^2 < \chi^2_{0,05; 5}$ - нөлдік гипотезаны жоққа шығаруға негіз жоқ. Алдыңғы 1-мысалда теориялық және эмпирикалық жиіліктер берілген. Енді тек эмпирикалық жиіліктер белгілі болғанда теориялық жиіліктерді қалай есептеуге болатындығын көрсетелік.

Мысал 2. Интервалдық вариациялық қатар (III-тарау,1-кесте) мына түрде берілген:

x_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	10	21	35	22	12

Пирсон критерийін қолданып маңыздылық деңгейі $\gamma = 0,05$ болғанда сандық белгінің бақыланған мәндерін пайдаланып “бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген” -деген нөлдік болжамды тексеріңіз.

Шешуі.

1. Бас жинақтың үлестірім заңы туралы болжам жасау үшін, біріншіден, полигон және гистограмманың түріне қараймыз. Мысалы, бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген деп болжам жасау үшін:

- а) гистограмманың түрі Гаусс қисығының түріне ұқсас болуы керек
- б) эмпирикалық ассиметрия мен экцесс мына теңсіздіктерді

$$|a_s| < 2\sigma_s \text{ және } |e_k| < 2\sigma_k \text{ қанағаттандыруы керек.}$$

Мұндағы

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}$$

Қарастырып отырған мысал үшін

$$a_s = -0,018, \quad \sigma_k = 0,8733, \quad \text{ал } \sigma_s = 0,2377, \quad \sigma_k = 0,4547$$

олай болса $|a_s| < 2\sigma_s$ және $|e_k| < 2\sigma_k$.

Енді гистограммаға қарасақ (III тарау, §1), оның түрі Гаусс қисығына ұқсас. Демек, бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген деп болжам жасауға негіз бар.

2. Енді нөлдік болжамды тексеру үшін Пирсон критерийін қолданамыз. Ол үшін

$$n'_i = np_i, \quad p_i = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_T}{\sigma_T}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_T}{\sigma_T}\right) \text{ формулаларын қолданып теориялық}$$

жиіліктерді есептейміз.

$$Z_{i-1} = \frac{x_{i-1} - \bar{x}_T}{\sigma_T}, \quad Z_i = \frac{x_i - \bar{x}_T}{\sigma_T},$$

Белгілеу енгізелік

Есептеу кестесін құрамыз.

Интервалдар	n_i	Z_{i-1}	Z_i	$\phi(Z_{i-1})$	$\phi(Z_i)$	p_i	n_i^0
0-5	10	-2,23	-1,35	-0,4870	-0,4115	0,0755	8
5-10	21	-1,35	-0,48	-0,4115	-0,1844	0,2277	23
10-15	35	-0,48	0,39	-0,1844	0,1517	0,3361	34
15-20	22	0,39	1,27	0,1517	0,3980	0,2463	25
20-25	$\frac{12}{100}$	1,27	2,14	0,3980	0,4838	0,0858	$\frac{9}{99}$

$\chi^2_{\text{бак}}$ есептеу үшін есептеу кестесін жазған тиімді

i	n_i	n_i^0	$n_i - n_i^0$	$(n_i - n_i^0)^2$	$\frac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0}$
1	10	8	2	4	0,5
2	21	23	-2	4	0,17
3	35	34	1	1	0,03
4	22	25	-3	9	0,36
5	12	9	3	9	1
Σ					1,7

Сонда $\chi^2_{\text{бак}} = 1,7$.

Енді $\gamma = 0,05$ маңыздылық деңгейінде $k = 5 - 1 - 2 = 2$ еркіндік дәрежесі бойынша $\chi^2_{\text{сын}}(0,05; 2)$ кітап соңындағы кестеден анықтаймыз:

$\chi^2_{\text{сын}}(0,05; 2) = 6$. Осыдан $\chi^2_{\text{бак}} < \chi^2_{\text{сын}}$ екенін көреміз. Демек, бас жинақтың қалыпты үлестіріммен берілгендігі туралы нөлдік болжамды қабылдамауға негіз жоқ.

Жаттығу есептері

1. Мына таңдаманың сипаттамаларын және эмпирикалық функциясын табыңыз.

x_i	-1	1	2	3
n_i	3	4	2	1

2. Қалыпты үлестірілген бас жинақтың орташа квадраттық ауытқуын σ , таңдамалық орташасын \bar{x}_T , түзетілген таңдамалық орташа квадраттық ауытқуын s , таңдама көлемін n деп алып, белгісіз математикалық үміт a - ны бағалайтын сенімділік интервалдарын табыңыз.

а) $\sigma = 4$, $\bar{x}_T = 10,2$, $n = 16$, $\gamma = 0,99$

б) $\sigma = 5$, $\bar{x}_T = 16,8$, $n = 25$, $\gamma = 0,95$

в) $s = 3$, $\bar{x}_T = 12$, $n = 9$, $\gamma = 0,99$

г) $s = 7,2$, $\bar{x}_T = 10$, $n = 40$, $\gamma = 0,95$