III Бөлім. МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Негізгі ұғымдар, таңдамалық тәсіл

Математикалық статистикада дискретті немесе үзіліссіз сандық сипатты белгі X, яғни, осы белгінің мүмкін мәндерінен тұратын бас жинақ зерттелінеді. Оның бас орташа, бас дисперсия т.с.с. сандық сипаттамаларын табу мәселесі практикалық қажеттіліктен туындайды.

Алайда, көп жағдайда бас жинақты толық анықтау мүмкін емес, немесе оны анықтау көп жағдайда тиімсіз болады. Сондықтан, осы бас жинақтан варианталар деп аталынатын $x_1, x_2, \ldots, x_k$ элементтерінен тұратын жиынша кездейсоқ теріліп алынады. Бұл жиыншада x_1 вариантасы n_1 рет, x_2 вариантасы n_2 рет, т.т., $x_к$ вариантасы $n_к$ рет қайталануы мүмкін. Онда осы жиыншаны былай жазып

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

вариациялық қатар түрінде жазылған таңдама дейміз.

Мұндағы n_i - x_i вариантасының жиілігі деп, ал $n=\sum_{i=1}^{n} n_i$ таңдаманың көлемі деп аталады.

Енді осы таңдаманың сандық сипаттамалары арқылы бас жинақты зерттеуге болады. Осы таңдамалық тәсіл - математикалық статистиканың негізгі тәсілі болып табылады.

§1. ТАҢДАМАНЫҢ СИПАТТАМАЛАРЫ

а) Эмпирикалық функция

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \qquad (3.1.1)$$

Мұнда n_x X-тан кіші болатын варианталардың жиіліктерінің қосындысы. таңдаманың көлемі үлкен болғанда, осы функция арқылы бас жинақтың белгісіз интегралдық үлестірім функциясы F(x) -ты жуықтап табуға болады.

б) Жиіліктер полигоны.

Жазықтықтағы координаталары (x_1,n_1), (x_2,n_2),..., (x_k,n_k) нүктелерін қосатын кесінділерден тұратын қисық сызық полигон деп аталады.

в) таңдамалық орташа

$$\overline{X}_T = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$$

(3.1.2)

г) таңдамалық дисперсия

$$D_T = \frac{\sum n_i (x_i - x_T)^2}{n} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - (x_T)^2 \qquad (3.1.3)$$

д) таңдамалық орташа квадраттық ауытқу.

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \qquad (3.1.4)$$

е) *к*-шы ретті бастапқы эмпирикалық момент

$$M_к = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}, \quad к=1,2,3,... \qquad (3.1.5)$$

ж) *к* -шы ретті орталық эмпирикалық момент

$$m_к = \frac{\sum n_i (x_i - x_T)^k}{n} \qquad к=1,2,3,... \qquad (3.1.6)$$

з) таңдамалық асимметрия

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_T^3} \qquad (3.1.7)$$

и) таңдамалық эксцесс

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3 \qquad (3.1.8)$$

Ескерту 1. Егер X_i варианталары үлкен сандар болса, жоғарыдағы (3.1.3) формулаларын тікелей пайдаланбай,$u_i = x_i - c$ деген шартты варианталарға көшіп, мына формулаларды пайдаланған ы”ғайлы болады

$$\overline{X}_T = \frac{\sum n_i u_i}{n} + C \qquad (3.1.9)$$

$$D_T(x) = D_T(u) = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_i u_i}{n}\right)^2 \qquad (3.1.10)$$

Мұндағы C - "жалған нөл" деп аталынатын сан, оны өзіміз жиілігі ең үлкен варианталарына шамалас етіп таңдаймыз.

Мысал 1. таңдама мына вариациялық қатар түрінде берілген:

x_i	1	4	5
n_i	4	4	2

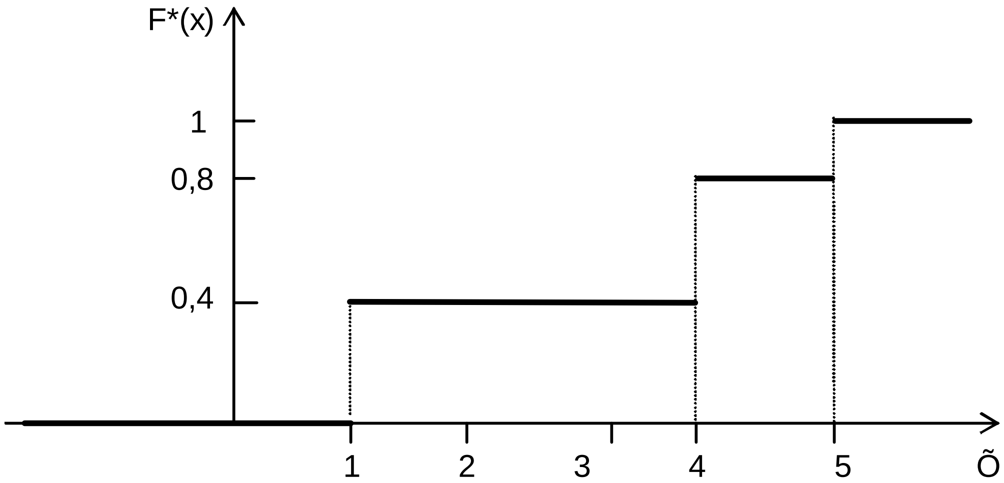
Барлық сипаттамаларын табыңыз.

Шешуі: x_i варианталары кішкене сандар болғандықтан (3.1.1) - (3.1.8) формулаларын тікелей қолданамыз.

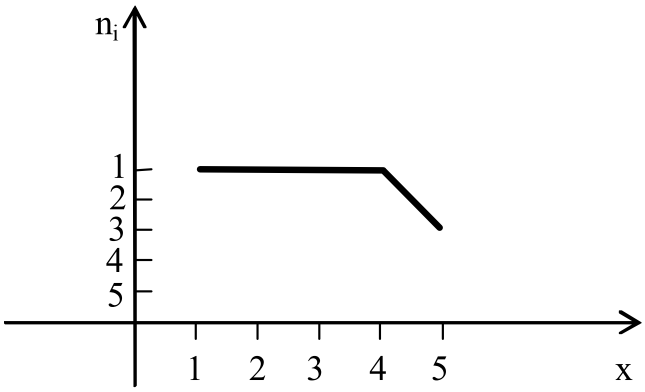
а) таңдаманың көлемі n=10 және $x \le 1$ болса $n_x=0$ (1-ден кіші варианталар жоқ), демек $F^*(x)=0$, ал $x<4$ болса $n_x = 4$, $F^*(x)=0{,}4$, т.с.с. есептеулер жүргізіп мына функцияны табамыз.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } -\infty < x \le 1 \\ 0{,}4, & \text{егер } 1 < x \le 4 \\ 0{,}8, & \text{егер } 4 < x \le 5 \\ 1, & \text{егер } 5 < x < +\infty \end{cases}$$

Осы функцияның графигі төмендегідей болғандықтан, эмпирикалық функцияны баспалдақ тәріздес функция деп атау орынды.



б) Жиіліктер полигоны төмендегідей қисық болады.



в) $\bar{x}_T = \dfrac{4\cdot 1 + 4\cdot 4 + 2\cdot 5}{10} = 3$

г) $D_T = \dfrac{4\cdot 1^2 + 4\cdot 4^2 + 2\cdot 5^2}{10} - 9 = 2{,}8$

д) $\sigma_T = \sqrt{2{,}8} \approx 1{,}67$

е) $M_1 = \bar{x}_T,\ M_2 = \dfrac{4\cdot 1^2 + 4\cdot 4^2 + 2\cdot 5^2}{10} = 11{,}8$

ж) $m_1 = 0$, $m_2 = D_T$

$$m_3 = \frac{4\cdot(1-3)^3 + 4\cdot(4-3)^3 + 2\cdot(5-3)^3}{10} = -1{,}2$$

$$m_4 = \frac{4 \cdot (1-3)^4 + 4 \cdot (4-3)^4 + 2 \cdot (5-3)^4}{10} = 1{,}0$$

з) $$a_s = -\frac{1{,}2}{(1{,}67)^3} = -0{,}26$$

и) $$e_k = \frac{10}{7{,}84} - 3 = -1{,}72$$

Мысал 2. Берілген вариациялық қатар арқылы x_T мен D_T -ны табыңыз.

x_i	3860	3900	3910	3913
n_i	2	13	4	1

Шешуі: Варианталар үлкен сандар, сондықтан C=3900 деп алып, Ui=Xi-C шартты варианталарға көшейік, яғни шартты вариациялық қатар аламыз.

Ui	-40	0	10	13
n_i	2	13	4	1

Сонда (3.1.9), (3.1.10) формулаларын пайдалансақ

$$x_T = \frac{2 \cdot (-40) + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 13}{20} + 3900 = 3898{,}65$$

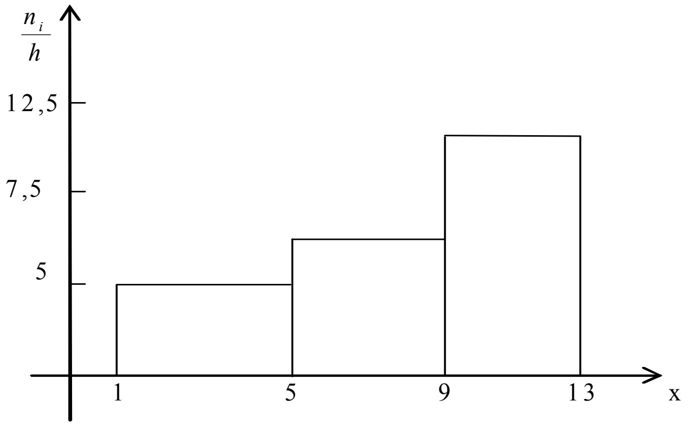
$$D_T = \frac{2 \cdot 1600 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 169}{20} - \left(\frac{-80 + 40 + 13}{20} \right)^2 = 186{,}63$$

Ескерту 2. Егер сандық сипатты белгі X үзіліссіз таралған болса, оның бақыланған мәндері кіретін интервалды ұзындықтары h болатындай бірнеше кіші интервалдарға бөліп, әрбір бөлікте жататын варианталардың жиіліктерінің қосындысы n_i анықталады. Сонда табаны $(x_i;x_{i+1})$ кіші интервал, ал биіктігі $\frac{n_i}{h}$ болатын тіктөртбұрыштардан құралған фигураны - гистограмма дейміз.

Мысал 3. Мына таңдаманың гистограммасын құрыңыз.

Интервал нөмірі	Кіші интервалдар	Варианталардың жиіліктерінің қосындысы	Жиіліктер тығыздығы
i	$(x_i ; x_{i+1})$	n_i	n_i /h
1	(1 ; 5)	20	5
2	(5; 9)	30	7,5
3	(9; 13)	50	12,5

Шешуі: Абциссалар осінде ұзындықтары 4 болатын берілген интервалдарды саламыз. Енді табандары осы интервалдар болатын ал биіктіктері $\frac{n_i}{h}$ болатын тіктөртбұрыштарды саламыз.



Гисторамманың ауданы n кв.өлшем бірлігіне тең болады.

IV ТАРАУ. ҮЛЕСТІРІМ ПАРАМЕТРЛЕРІН БАҒАЛАУ

Дискретті немесе үзіліссіз сандық сипатты белгі X-ы" үлестірімінің белгісіз параметрін Θ деп белгілейік. Оның таңдама арқылы табылатын нүктелік бағасы Θ* болсын. Әртүрлі таңдамалар үшін өзгеріп отыратындықтан Θ* - кездейсоқ шама болады.

Анықтама 1. Егер M(Θ*)= Θ болса, онда Θ* жылжымаған баға деп аталады, ал басқа жағдайда жылжыған баға деп аталады.

Анықтама 2. Егер $\lim\limits_{n->\infty} P(|\theta - \theta^*| < \varepsilon) = 1$ болса, онда Θ* орнықты баға деп аталады, бұл жерде n - таңдама көлемі.

§1. ТАҢДАМА АРҚЫЛЫ БІРДЕН ТАБЫЛАТЫН НҮКТЕЛІК БАҒАЛАР

Сөйлем 1. Бас орташаның жылжымаған және орнықты нүктелік бағасы таңдамалық орташа болады.

Сөйлем 2. Бас дисперсияның жылжыған бағасы таңдамалық дисперсия болады, ал жылжымаған бағасы түзетілген таңдамалық дисперсия s^2 болады, мұнда $s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_T$, n - таңдама көлемі.

Мысал 1. Бас жинақтан мынадай таңдама алынған.

x_i	4	5	7
n_i	10	5	5

а) Бас орташаның жылжымаған бағасын табыңыз.

б) Бас дисперсиясының жылжымаған және жылжыған бағаларын табыңыз.

Шешуі:

а) таңдамалық орташа жылжымаған баға болады.

$$\bar{x}_T = \frac{4\cdot 10 + 5\cdot 5 + 7\cdot 5}{20} = 5$$

б) Жылжыған баға ретінде D_T, ал жылжымаған баға ретінде s^2 алынады

$$D_T = \frac{4^2\cdot 10 + 5^2\cdot 5 + 7^2\cdot 5}{20} - 25 = 1{,}5, \qquad s^2 = \frac{20}{19}\cdot 1{,}5 = 1{,}58$$

§2. МОМЕНТТЕР ӘДІСІ

Бұл әдіс бастапқы және орталық эмпирикалық моменттер өздеріне сәйкес бастапқы және орталық теориялық моменттердің орнықты бағалары болатындығына негізделген. Осы сәйкес моменттерді бір-біріне теңестіре отырып, үлестірімнің белгісіз параметрінің нүктелік бағалауларын табуға болады.

<u>Мысал 1</u>. Көрсеткіштік үлестірімнің $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x \ge 0)$ белгісіз параметрі λ- ның нүктелік бағасын табыңыз.

Шешуі: Бастапқы І-ші ретті эмпирикалық және теориялық моменттерді теңестіреміз.

$$\nu_1 = M_1$$

Көрсеткіштік үлестірімнің бірінші ретті бастапқы моменті

$\nu_1 = M(x) = \frac{1}{\lambda}$, ал $M_1 = \bar{x}_T$ болғандықтан $\frac{1}{\lambda} = \bar{x}_T$ теңдігін аламыз. Осыдан белгісіз параметр λ-ның нүктелік бағасы $\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}_T}$ тең.

Мысал 2. Берілген таңдама бойынша моменттер әдісін қолданып қалыпты үлестірімнің

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

белгісіз a және σ параметрлерінің нүктелік бағасын табыңыз.

Шешуі: Бұл жағдайда екі a және σ белгісіз параметр болғандықтан бірінші, екінші ретті теориялық және эмпирикалық моменттерді теңестіреміз.

$$\nu_1 = M_1, \ \mu_2 = m_2.$$

Ары қарай $\nu_1 = M(x) = a$, $\mu_2 = D(x) = \sigma^2$ және $M_1 = \bar{x}_T$, $m_2 = D_T$ екенін ескерсек, онда мынадай нүктелік бағалар аламыз

$$a^* = \bar{x}_T, \ \sigma^* = \sqrt{D_T}$$

Мысал 3. Берілген таңдамасының сипаттамалары арқылы моменттер әдісімен бірқалыпты үлестірімнің

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & x \bar{\in} [a;b] \end{cases}$$

белгісіз *a* және b параметрлерінің нүктелік бағаларын табыңыз.

Шешуі: Бірінші және екінші ретті эмпирикалық моменттерді теориялық моменттерге теңестірейік, яғни $\nu_1=M_1$, $\mu_2=m_2$.

Сонда $\nu_1=M(x)=\frac{a+b}{2}$, $\mu_2=D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$, $M_1=\bar{x}_T$, $m_2=D_T$ екенін ескере отырып мынадай теңдеулер системасын аламыз:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{1}=\bar{x}_T \\ \frac{(b-a)^2}{12}=D_T \end{cases}$$

Осы системаны шеше отырып, $a^*=\bar{x}_T-\sqrt{3D_T}$, $b^*=\bar{x}_T+\sqrt{3D_T}$ нүктелік бағаларын табамыз.

§4. ИНТЕРВАЛДЫҚ БАҒАЛАР

Бір санмен ғана анықталатын нүктелік баға, таңдаманың көлемі аз болғанда, өрескел қатеге соқтыруы мүмкін, сондықтан бас жинақтың белгісіз параметрінің интервалдық бағасын, яғни осы θ параметрі жататындай (α,β) интервалын белгілі бір сенімділікпен айқындау мәселесін қарастырайық.

<u>Анықтама 1.</u> θ параметрінің θ^* бағасы бойынша сенімділігі (сенімділік ықтималдығы) деп $|\theta-\theta^*|<\delta$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығы γ- ны айтады, яғни $P(|\theta-\theta^*|<\delta)=\gamma$, бұл жерде δ - бағаның дәлдігі.

<u>Анықтама 2.</u> $(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta)$ - интервалын γ сенімділігімен алынған сенімділік интервалы деп атайды.

<u>Сөйлем 1.</u> Қалыпты үлестіріммен берілген сандық сипатты белгі X шаманың белгісіз *a* математикалық үмітін таңдамалық орташа $\bar{x}_T$ арқылы γ сенімділігімен бағалау үшін мынадай сенімділік интервалдарын аламыз.

а) Егер σ - бас орташа квадраттық ауытқу белгілі болса, онда

$$\bar{x}_T-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_T+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (4.4.1)$$

t-саны $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ -ға тең болатындай сан, оны Лаплас функциясының мәндер кестесінен аламыз.

б) Егер σ - белгісіз болса, онда

$$\bar{x}_T-t\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_T+t\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (4.4.2)$$

Мұнда S - түзетілген таңдамалық орташа квадраттық ауытқу, $t_\gamma=t(\gamma,n)$ - шамасы кестеден анықталады.

<u>Сөйлем 2.</u> Қалыпты үлестіріммен берілген X-тың бас орташа

квадраттық ауытқуы σ -ны берілген γ сенімділігімен бағалау үшін мынадай сенімділік интервалдарын аламыз.

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q)\text{ , егер } q<1 \qquad (4.4.3)$$
$$0<\sigma<s(1+q)\text{ , егер } q>1 \qquad (4.4.4)$$

Бұл жерде $q=q(n,\gamma)$ - кестеден алынады.

Мысал 1. Бас орташа квадраттық ауытқуы $\sigma = 5$ болатын қалыпты үлестіріммен берілген бас жинақтан алынған көлемі n=25 таңдамадан $\bar{x}_T=17$ табылды. Бас жинақтың белгісіз математикалық үмітін $\gamma=0,99$ сенімділігімен бағалайтын интервалын табыңыз.

Шешуі: (4.4.1) формуласын пайдаланамыз. Егер $\frac{\gamma}{2}=\Phi(t)=0,495$, онда кестеден t=2,57, яғни

$$17-2,57\cdot\frac{5}{\sqrt{25}}<a<17+2,57\cdot\frac{5}{\sqrt{25}}$$

Осыдан $14,43<a<19,57$ сенімділік интервалы.

Мысал 2. Әлдебір физикалық шама бір құралмен 10 рет өлшенеді. Өлшеулердің кездейсоқ кателерінің түзетілген орташа квадраттық ауытқуы 0,5 - ке тең. Өлшеу құралының дәлдігін $\gamma=0,99$ сенімділігімен табыңыз.

Шешуі: Құралдың дәлдігі өлшеуде жіберілген кездейсоқ қателердің бас орташа квадраттық ауытқуымен сипатталады, яғни бізге σ -ны бағалайтын сенімділік интервалын табу керек.

$\gamma=0,99$, n=10 болса, кестеден q=1,08 олай болса, (4.4.4) формуласын пайдалана отырып $0<\sigma<1,04$ дәлдікті анықтайтын сенімділік интервалын табамыз.

V-ТАРАУ. СТАТИСТИКАЛЫҚ БОЛЖАМДАРДЫ ТЕКСЕРУ

§1. НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР. БОЛЖАМДЫ ТЕКСЕРУДІҢ ЖАЛПЫ СХЕМАСЫ

Анықтама 1. Статистикалық болжам деп кездейсоқ шаманың үлестірімінің түрі немесе үлестірім параметрлері туралы алдын-ала жасалатын болжамды айтады. Статистикалық болжам таңдаманың көмегімен тексеріледі.

Алдымен нөлдік болжам деп аталатын, тексерілуге тиіс Ho болжамы қарастырылады. Бұл болжамға қарсы болжамды альтернативті деп атап, H_1 әріпімен белгілейміз. Мысалы: үлестірімнің белгісіз параметрі θ туралы нөлдік болжам былай болса Ho: $\theta=\theta o$, онда $H_1 : \theta \neq \theta o$ (H_1: $\theta >< \theta o$).

Статистикалық болжамды тексеру барысында екі түрлі қате жіберуіміз мүмкін.

Бірінші текті қате - Ho болжамы жоққа шығарылып H_1 болжамы қабылданады, бірақ негізінде Но дұрыс.

Екінші текті қате - Но болжамын қабылдаймыз, бірақ негізінде H_1 болжамы дұрыс.

Анықтама 2. Бірінші текті қате жіберу ықтималдығын **маңыз**дылық деңгейі дейміз де, α әріпімен белгілейміз.

Болжамды тексерудің жалпы схемасы:

1 Үлестірімі белгілі статистикалық критерий деп аталатын F кездейсоқ шамасы енгізіледі. Бұл шаманың әртүрлі еркіндік дәрежелері болып, ал үлестірімі қалыпты, хи - квадрат, Стьюдент, Фишер-Снедекор үлестірімдерімен берілуі мүмкін.

2 таңдамалық (эмпирикалық) белгілі деректерге сүйене отырып, критерийдің бақыланатын мәні $F_{бақ}$, анықталады.

3 Берілген α **маңыз**дылық деңгейінде F үлестірімінің сын нүктелері кестесі арқылы, критерийдің сындық мәні - $F_{сын}$ анықталады.

4 Егер $F_{бақ}<F_{сын}$ болса, онда Но болжамын жоққа шығару

5 ға негіз жоқ, ал егер $F_{бақ}>F_{сын}$ болса, онда Но болжамы қабылданбайды.

§2. ПИРСОННЫҢ КЕЛІСІМДІК ХИ-КВАДРАТ КРИТЕРИЙІ

Егер үлестірім заңы белгісіз болса, онда "бас жинақ А заңы бойынша үлестірілген", - деген нөлдік болжам келісімдік критерийлері арқылы тексеріледі. Олардың бірнеше түрі бар: Пирсон критерийі, Колмогоров критерийі, Смирнов критерийі т.т.

Но: "бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген" деген болжамды тексеру үшін Пирсонның келісімдік χ^2 критерийі қолданылады.

Сонымен h қадамымен біркелкі орналасқан таңдама берілсін

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_m
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_m

Енді теориялық жиіліктерді табамыз.

$$n_i^0=\frac{nh}{\sigma_T}\cdot\varphi(u_i), i=\overline{1,m}$$

$$u_i=(x_i-\overline{x}_T)/\sigma_T,\quad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$$

немесе

$$n_i^0=np_i,\qquad P_i=P(x_{i-1}<x<x_i)$$

Осыдан мына кесте анықталады:

Эмпирикалық жиіліктер	N_1	n_2	n_3	...	n_m

Теориялық жиіліктер	n_1^0	n_2^0	n_3^0	...	n_m^0

Теориялық және эмпирикалық жиіліктердің бір-бірінен ауытқуы кездейсоқ па, бақылаулар саны аз ба, әлде "бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген" деген нөлдік болжам дұрыс емес пе? Осы сұрақтарға Пирсон критерийі жауап береді.

Тексеру схемасы:

2.Статистикалық критерий ретінде мына кездейсоқ шаманы аламыз

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^0\right)^2}{n_i^0} \tag{5.2.1}$$

Бұл шама - еркіндік дәрежесі к=s-1-r болатын, хи - квадрат үлестірімімен таралған кездейсоқ шама. Мұнда s - таңдамадағы топтар саны, r - үлестірім параметрлерінің саны.

2.Берілген деректерге сүйене отырып, критерийдің бақыланатын мәнін анықтаймыз.

$$\chi^2_{бак} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^0\right)^2}{n_i^0} \tag{5.2.2}$$

3. Берілген α **маңыз**дылық деңгейінде, хи - квадрат үлестірімнің сын нүктелері кестесі арқылы $\chi^2_{сын}(\alpha;\kappa)$ критерийдің сындық мәнін анықтаймыз.

4. Егер $\chi^2_{бак} < \chi^2_{сын}(\alpha;\kappa)$ - нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ, ал егер $\chi^2_{бак} > \chi^2_{сын}(\alpha;\kappa)$ - нөлдік болжам қабылданбайды.

Мысал. 1. Эмпирикалық және теориялық жиіліктер берілген

Эмпирикалық жиіліктер	5	13	39	75	105	83	32	14
Теориялық жиіліктер	3	15	41	80	101	77	38	13

Берілген α=0,05 **маңыз**дылық деңгейінде бас жинақтың қалыпты үлестірілгендігі туралы болжамды тексеріңіз.

Шешуі: Критерийдің бақыланатын мәнін анықтау үшін төмендегі кестені құрамыз.

s_i	n_i	n_i^0	$n_i - n_i^0$	$(n_i - n_i^0)^2$	$(n_i - n_i^0)^2 / n_i^0$
1	5	3	2	4	1,333
2	13	15	-2	4	0,267
3	39	41	-2	4	0,097
4	75	80	-2	25	0,3125
5	105	101	4	16	0,158
6	83	77	6	36	0,468
7	32	38	-6	36	0,947

8	14	13	1	1	0,077
					$\sum \approx 3{,}66$

Сонымен $\chi^2_{бак}=3{,}66$, ал критерийдің еркіндік дәрежесі к=s-1-r=5, себебі s = 8, r = 2 (қалыпты үлестірім екі параметр арқылы анықталады). Онда кестеден $\chi^2_{сын}$ (0,05; 5)=11,1. Сонымен $\chi^2_{бак} < \chi^2_{сын}$ - нөлдік гипотезаны жоққа шығаруға негіз жоқ. Алдыңғы 1-мысалда теориялық және эмпирикалық жиіліктер берілген. Енді тек эмпирикалық жиіліктер белгілі болғанда теориялық жиіліктерді қалай есептеуге болатындығын көрсетелік.

Мысал 2. Интервалдық вариациялық қатар (ІІІ-тарау,1-кесте) мына түрде берілген:

x_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	10	21	35	22	12

Пирсон критерийін қолданып **маңыз**дылық деңгейі $\gamma = 0{,}05$ болғанда сандық белгінің бақыланған мәндерін пайдаланып “бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген” -деген нөлдік болжамды тексеріңіз.

Шешуі.

1. Бас жинақтың үлестірім заңы туралы болжам жасау үшін, біріншіден, полигон және гистограмманың түріне қараймыз. Мысалы, бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген деп болжам жасау үшін:

а) гистограмманың түрі Гаусс қисығының түріне ұқсас болуы керек

б) эмпирикалық ассиметрия мен экцесс мына теңсіздіктерді $|a_s| < 2\sigma_s$ және $|e_k| < 2\sigma_k$ қанағаттандыруы керек.

Мұндағы

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}$$

Қарастырып отырған мысал үшін

$$a_s = -0{,}018, \ \sigma_k = 0{,}8733, \text{ ал } \sigma_s = 0{,}2377, \ \sigma_k = 0{,}4547$$

олай болса $|a_s| < 2\sigma_s$ және $|e_k| < 2\sigma_k$.

Енді гистограммаға қарасақ (ІІІ тарау, §1), оның түрі Гаусс қисығына ұқсас. Демек, бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген деп болжам жасауға негіз бар.

2. Енді нөлдік болжамды тексеру үшін Пирсон критерийін қолданамыз. Ол үшін

$$n'_i = np_i, \quad p_i = \phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_T}{\sigma_T}\right) - \phi\left(\frac{x_{i-1} - \overline{x}_T}{\sigma_T}\right)$$

формулаларын қолданып теориялық жиіліктерді есептейміз.

Белгілеу енгізелік $Z_{i-1} = \dfrac{x_{i-1} - \overline{x}_T}{\sigma_T}$, $Z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_T}{\sigma_T}$,

Есептеу кестесін құрамыз.

Интер-валдар	n_i	Z_{i-1}	Z_i	$\phi(Z_{i-1})$	$\phi(Z_i)$	p_i	n_i^0
0-5	10	-2,23	-1,35	-0,4870	-0,4115	0,0755	8
5-10	21	-1,35	-0,48	-0,4115	-0,1844	0,2277	23
10-15	35	-0,48	0,39	-0,1844	0,1517	0,3361	34
15-20	22	0,39	1,27	0,1517	0,3980	0,2463	25
20-25	$\frac{12}{100}$	1,27	2,14	0,3980	0,4838	0,0858	$\frac{9}{99}$

$x^2{}_{\text{бақ}}$ есептеу үшінде есептеу кестесін жазған тиімді

i	n_i	n_i^0	$n_i - n_i^0$	$(n_i - n_i^0)^2$	$\frac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0}$
1	10	8	2	4	0,5
2	21	23	-2	4	0,17
3	35	34	1	1	0,03
4	22	25	-3	9	0,36
5	12	9	3	9	1
$\sum$					1,7

Сонда $x^2{}_{\text{бақ}}$=1,7.

Енді $\gamma = 0{,}05$ **маңыз**дылық деңгейінде $k = 5 - 1 - 2 = 2$ еркіндік дәрежесі бойынша $x^2{}_{\text{сын}}$(0,05;2) кітап со”ындағы кестеден анықтаймыз: $x^2{}_{\text{сын}}$(0,05;2)=6. Осыдан $x^2{}_{\text{бақ}} < x^2{}_{\text{сын}}$ екенін көреміз. Демек, бас жинақтың қалыпты үлестіріммен берілгендігі туралы нөлдік болжамды қабылдамауға негіз жоқ.

Жаттығу есептері

1. Мына таңдаманың сипаттамаларын және эмпирикалық функциясын табыңыз.

x_i	-1	1	2	3
n_i	3	4	2	1

2. Қалыпты үлестірілген бас жинақтың орташа квадраттық ауытқуын σ, таңдамалық орташасын $\overline{x}_T$, түзетілген таңдамалық орташа квадраттық ауытқуын s, таңдама көлемін n деп алып, белгісіз математикалық үміт a -ны бағалайтын сенімділік интервалдарын табыңыз.

а) σ= 4, $\overline{x}_T = 10{,}2$, n=16, γ=0,99

б) σ = 5, $\overline{x}_T = 16{,}8$, n=25, γ=0,95

в) s = 3, $\overline{x}_T = 12$, n=9, γ=0,99

г) s = 7,2, $\overline{x}_T = 10$, n=40, γ=0,95

Бірінші және екінші бөлім бойынша бақылаулардан сәтті өткеніңіз бізді қуантады. Сөйтіп Сіз Ықтималдықтар теориясы бойынша мейлінше толық білім алдыңыз. Енді міне үшінші шешуші сынақты бастағалы отырсыз.

Математикалық статистика бойынша да сынақты сәтті тапсыруыңызға тілектеспіз.